STATISTICAL METHODS

M.A . ఆర్థికశాస్త్రం, Semester – II, Paper-V

రచయిత

షేక్ అమీర్

MA (Eco), MA (DE)., MBA., M.A. (Psy), M.Phil., Ph.D

ఎకనామిక్స్‌లో అకాడెమిక్ కౌన్సెలర్

దూర విద్య కేంద్రం

ఆచార్య నాగార్జున విశ్వవిద్యాలయం

Director

Dr. NAGARAJU BATTU

MBA., MHRM., LLM., M.Sc. (Psy).,MA (Soc)., M.Ed., M.Phil., Ph.D

CENTRE FOR DISTANCE EDUCATION
ACHARAYA NAGARJUNA UNIVERSITY
NAGARJUNA NAGAR – 522 510

Ph: 0863-2293299, 2293214, ,Cell:9848477441
0863-2346259 (Study Material)
Website: www.anucde.info
e-mail:anucdedirector@gmail.com

M.A . ఆర్థికశాస్త్రం.,

First Edition: 2022

No. of Copies:

©Acharya Nagarjuna University

This book is exclusively prepared for the use of students of M.A . Economics, **Centre for Distance Education, Acharya Nagarjuna University and this book is meant for limited circulation only.**

Published by:

Dr. NAGARAJU BATTU,

Director

Centre for Distance Education,

Acharya Nagarjuna University

Printed at:

FOREWORD

Since its establishment in 1976, Acharya Nagarjuna University has been forging ahead in the path of progress and dynamism, offering a variety of courses and research contributions. I am extremely happy that by gaining 'A' grade from the NAAC in the year 2016, Acharya Nagarjuna University is offering educational opportunities at the UG, PG levels apart from research degrees to students from over 443 affiliated colleges spread over the two districts of Guntur and Prakasam.

The University has also started the Centre for Distance Education in 2003-04 with the aim of taking higher education to the door step of all the sectors of the society. The centre will be a great help to those who cannot join in colleges, those who cannot afford the exorbitant fees as regular students, and even to housewives desirous of pursuing higher studies. Acharya Nagarjuna University has started offering B.A., and B.Com courses at the Degree level and M.A., M.Com., M.Sc., M.B.A., and L.L.M., courses at the PG level from the academic year 2003-2004 onwards.

To facilitate easier understanding by students studying through the distance mode, these self-instruction materials have been prepared by eminent and experienced teachers. The lessons have been drafted with great care and expertise in the stipulated time by these teachers. Constructive ideas and scholarly suggestions are welcome from students and teachers involved respectively. Such ideas will be incorporated for the greater efficacy of this distance mode of education. For clarification of doubts and feedback, weekly classes and contact classes will be arranged at the UG and PG levels respectively.

It is my aim that students getting higher education through the Centre for Distance Education should improve their qualification, have better employment opportunities and in turn be part of country's progress. It is my fond desire that in the years to come, the Centre for Distance Education will go from strength to strength in the form of new courses and by catering to larger number of people. My congratulations to all the Directors, Academic Coordinators, Editors and Lesson- writers of the Centre who have helped in these endeavors.

Prof. P. Raja Sekhar
Vice-Chancellor (FAC)
Acharya Nagarjuna University

205EC21: STATISTICAL METHODS

MODULE 1 : SAMPLING METHODS

Concept of sampling - random and non-random sampling; Simple random; Stratified random, systematic sampling, cluster sampling and non-random sampling methods.

MODULE 2 : CORRELATION AND REGRESSION

Correlation and regression analysis and their properties; Concept of the least squares and the lines of regression and applications.

MODULE 3 : TIME SERIES ANALYSIS

Introduction - components - measurement of trend - graphic, (Free hand curve fitting) method, method of semi average, method of moving average, method of curve fitting by principle of least squares.

MODULE 4 : PROBABILITY

Deterministic and non-deterministic relationships - Terminology - Some basic concepts of set theory - Probability defined - Theorems of probability - Conditional probability - Bayes theorem and inverse probability - Joint and marginal probabilties - Review Exercises.

MODULE 5 : THEORETICAL DISTRIBUTIONS

Binomial Distribution and Poisson Distibution - Assumptions constants - Normal Distribution - properties of normal distribution, constants of normal distribution - Review Exercises.

READING LIST:

1. S.C. Gupta Fundamentals of statistics.
2. K.Chandra Sekhar, Business of statistics.
3. K.V.Sarma, Statistics made simple, Prentice Hall of India.

CONTENT

పాఠం : 1 గణాంక సేకరణ పద్ధతులు	1.1-1.8
పాఠం : 2 సహసం బంధము	2.1-2.16
పాఠం : 3 పతిగమనం	3.1-3.21
పాఠం 4 కాలశ్రేణుల విశ్లేషణ	4.1-4.3
పాఠం 5 కాలశ్రేణులలోని భాగాలు - ప్రవృత్తి గణన	5.1-5.4
పాఠం 6 ప్రవృత్తి గణన (Measurement of Trend)	6.1-6.28
పాఠం 7 కాలశ్రేణులు ఋతుసంబంధ విచరణాలు - ఋతు ప్రభావాలను తొలగించడం	7.1-7.22
పాఠం-8 సెట్ సిద్ధాంతం	8.1-8.10
పాఠం-9 షరతులతో కూడిన సంభావ్యత	9.1-9.9
పాఠం-10 బేయెస్ సిద్ధాంతం	10.1-10.11
పాఠం-11 విలోమ సంభావ్యత నమూనా	11-.1-110
పాఠం-12 ఉమ్మడి మరియు ఉపాంత సంభావ్యత	12.1-12.10
పాఠం-13 ద్విపద పంపిణి	13.1-13.12
పాఠం-14 పాయిజాన్ విభాజనం	14.1-14.10
పాఠం-15 సాధారణ పంపిణి	15.1-1513

పాఠం : 1

గణాంక సేకరణ పద్ధతులు

(Methods of Enumeration)

విషయక్రమం:

ఈ పాఠ్యాంశంలో మనం

దత్తాంశము, ప్రాథమిక మరియు ద్వితీయ మూల దత్తాంశాలు

వీటి దత్తాంశ సేకరణ పద్ధతులు

షెడ్యూలు, ప్రశ్నావళిల నిర్మాణం తద్వారా దత్తాంశ సేకరణ

సమిష్టి లేదా "జనాభా" పద్ధతి అంటే ఏమిటి, ఆ పద్ధతి ద్వారా గణాంక సేకరణ చేయు విధానం

ప్రతిచయనము మరియు ప్రతిరూప గ్రహణ పద్ధతులు, వాటి లాభ నష్టముల గురించి మరియు

వివిధ ప్రతిచయన లేదా ప్రతిరూప గ్రహణముల గురించి

మనము తెలుసుకుంటాం.

1.1 ఉపోద్ఘాతం

రాజకీయ, ఆర్థిక, వైజ్ఞానిక రంగాలన్నిటిలో గణాంకపద్ధతుల ఉపయోగము దినదినాభివృద్ధి చెందుతున్నది. గణాంక శోధన పరిశోధన అన్ని విషయాలలో తప్పనిసరి అవుతున్నది. గణాంకశోధన జరపడానికి మొట్టమొదట గణాంక విచారణ చేయాలి. గణాంక విచారణ అంటే, గణాంక పద్ధతుల ద్వారా విషయాలగురించి తెలుసుకోవడానికి జరిపె శోధన. యథార్థ విషయాలను గణాంకాల రూపంలో సేకరించడమే గణాంక శోధనలో ముఖ్యమైన అంశము. దత్తాంశ సేకరణ అంత సులభమైన పనికాదు. దత్తాంశ సేకరణకు ముందు అనేక ప్రాథమిక కార్యక్రమాలు నిర్వహించవలెను. గణాంక శోధన అంటే పరిమాణాత్మకంగా ఆధ్యయనానికి వీలైన సమస్యపై జరిపిన విచారణ. ఉదాహరణకు ప్రభుత్వము దేశంలోని నిరుద్యోగ సమస్యను పరిష్కరించదలచిందను కొందాము. పరిష్కరించడానికి ముందుగా నిరుద్యోగపు పరిమాణము దాని పరిమితులకు సంబంధించిన విషయాలపై దత్తాంశ సేకరణ గణాంకపద్ధతుల ద్వారా చేయవలెను. నిరుద్యోగ సమస్యను పరిమాణాత్మకంగా అంటే అంకెల సహాయంతో పరిశీలించే అవకాశం ఉంది. పరిశీలన తరువాత నిరుద్యోగ సమస్యను పరిష్కరించే కార్యక్రమాలు ప్రభుత్వము తీసుకొంటుంది. కాబట్టి గణాంక విచారణ అంటే ఒక రకమైన శోధన. గణాంక విచారణ చేయడంలో మొట్టమొదటి దశ యోజనదశ. దత్తాంశ సేకరణకు పూర్వము గణాంకశోధకుడు విచారణకు తగిన యోజన తయారు చేయవలెను. ప్రణాళిక తయారు చేయడానికి అనేక ప్రాథమిక చర్యలు తీసుకోవలెను.

1.2 విచారణోద్దేశము - పరిధి :

గణాంక విచారణ ఉద్దేశాన్ని జాగ్రత్తగా నిర్ణయించి నిర్వచిస్తే, దత్తాంశ సేకరణలో జరగబోయే కష్టనష్టాలు తగ్గే అవకాశాలున్నాయి. అంటే విచారణోద్దేశము ఖచ్చితంగా ఉంటే ఏ దత్తాంశము ఉపయోగపడుతుంది, ఏది పనికిరాదోకూడా సులభంగా గ్రహిచగలము. గణాంక విచారణోద్దేశంతోపాటు, దాని పరిధి కూడా నిర్ణయించవలెను. ప్రత్యేకమైన గణాంకశోధనలో దత్తాంశ సేకరణ ఎంతవరకు చేయవలెనో, సేకరణకు ముందు నిర్ణయించవలెను. ఎంత పరిమాణాత్మక దత్తాంశము సేకరించవలెనో గణాంకవిచారణోద్దేశంపైన, పరిధిపైన ఆధారపడి ఉంటాయి. కొన్ని విచారణలలో పూర్తి దత్తాంశము అవసరము. మరికొన్ని విచారణలలో వరణ అధ్యయనం చేస్తే దత్తాంశము సరిపోతుంది. సాధారణంగా గణాంక విచారణ చేయడంలో ఉద్దేశము, సేకరించిన దత్తాంశాన్ని పరిశీలించిన ఒక సత్యాన్ని రాబట్టడానికి ఉపయోగించడమే.

1.3 దత్తాంశసేకరణ మూలాలు :

విచారణోద్దేశము, పరిధి జాగ్రత్తగా నిర్ణయించిన తరువాత, దత్తాంశాన్ని సేకరించే మూలాలను (తావులు లేదా ప్రదేశాలు) గురించి నిర్ణయించవలెను. స్పష్టంగా చెప్పవలె నంటే దత్తాంశము రెండు తావులలో లభిస్తుంది. మొదటిది ఒక సంస్థ తన అవసరాలకు వ్రాసుకొన్న పుస్తకాలు, రెండోది ఇతర సంస్థలు తమ వ్యవహారాలను వ్రాసుకొన్న పుస్తకాలు. సంస్థ సొంతపుస్తకాలనుంచి సేకరించిన దత్తాంశాన్ని ప్రాథమిక దత్తాంశమని, ఇతర సంస్థల పుస్తకాల నుండి సేకరించిన మూలాన్ని ద్వితీయ మూలమని అంటారు. ఒక్కొక్కప్పుడు, ఒక ప్రత్యేక శోధనకు సేకరించిన ప్రధాన దత్తాంశము మరో శోధనకు ద్వితీయ దత్తాంశంగా ఉపయోగపడే అవకాశం కూడా ఉంది.

ఒక విచారణపై మొట్టమొదటిసారిగా పరిశోధకులు, గణకులు సేకరించిన దత్తాంశము ప్రధానదత్తాంశ మనిపించుకొంటుంది. ఇతరులు లోగడ సేకరించి దత్తాంశాన్ని, పత్రికలలో ప్రచురితమైన దత్తాంశాన్ని గ్రహిస్తే ద్వితీయదత్తాంశమనిపించు కొంటుంది. గణాంక విచారణ స్వభావము, ఉద్దేశము, పరిధులకు అనుగణంగా దత్తాంశాన్ని ప్రారంభికంగా సేకరించవవలెనో, లేదా లోగడ సేకరించి గాని ముద్రితంగా అముద్రితంగా గాని ఉన్న దత్తాంశాన్ని ఉపయోగించుకోవలెనో నిర్ణయించవలెను. ద్వితీయ దత్తాంశాన్ని వాడుకొనేటప్పుడు తగిన జాగ్రత్తలు తీసుకోవలెను. తీసుకోవలసిన జాగ్రత్త లేమంటే 1. లోగడ జరిగిన దత్తాంశసేకరణ ఉద్దేశాన్ని గుర్తించవలెను 2. ప్రచురించిన గణాంకాలు ఎట్లా సేకరించడం జరిగిందో తెలుసుకోవలెను. ప్రచురించిన గణాంకాలను యథాతథంగా తీసుకోరాదు విమర్శ జరిపి తీసుకోవలెను. ఒక సమస్యకు సంబంధించిన అనేక విషయాలను పరిశీలించి గణాంక విచారణ చెయ్యవలెనో నిర్ణయించవలెను. పరిశీలించవలసిన విషయాలలో ముఖ్యమైనవి - గణాంకవిచారణోద్దేశము పరిధి. ఏ విధమైన విచారణ కొనసాగించవలెననే విషయంపై విచారణోద్దేశానికి, పరిధికి తగిన ప్రభావము ఉంటుంది. విచారణ పూర్తిగణన ప్రతిచయన పరీక్ష విచారణ పరిధి విశాలమైతే భారీగా దత్తాంశసేకరణ చేయాలి. ఎటువంటి విచారణ జరపవలెననే సమస్యపై ఆర్థిక ప్రభావం కూడా ఉంటుంది. అట్లాగో అందుబాటులో ఉన్న సమయం కూడా విచారణ పద్ధతిని ప్రభావితం చేస్తుంది.

1.4 దత్తాంశ సేకరణ పద్ధతులు - జనాభా లెక్కల దర్యాప్తు పద్ధతి :

దత్తాంశ సేకరణలో ముఖ్యంగా రెండు పద్ధతులను ఉపయోగిస్తాము. మొదటిది జనాభాలెక్కల దర్యాప్తు పద్ధతి. రెండోది ప్రతిచయన పద్ధతి, గణాంకశాస్త్రంలో జనాభా అనే పదానికి వేరే అర్థం ఉంది. ఒక విచారణలో దత్తాంశ సేకరణ అన్ని అంశాల మీద జరగవలెననుకొందాము. ఈ అంశాల సముదాయాన్నే జనాభా అంటాము. ఉదాహరణకు ఒక విద్యాలయములో ఒక సంవత్సరం ఎంతమంది పరీక్షలో ఉత్తీర్ణులైనారో తెలుసుకోవలసి ఉందనుకొందాము ఈ విచారణలో జనాభా అంటే విశ్వవిద్యాలయంలో ఆ సంసవత్సరం చదువుతూ పరీక్షకు హాజరుకావలసిన విద్యార్థుల మొత్తము. దత్తాంశ సేకరణలో రెండో పద్ధతి పూర్తి జనాభాకు ప్రాతినిధ్యంవహించే ప్రతిచయనాలను తీసుకోవడం. జనాభాలో గల ప్రతి అంశంపైనా దత్తాంశ సేకరణ సాధ్యపడదు. అటువంటిప్పుడు కొన్ని ముఖ్యంశాలపైనే దత్తాంశ సేకరణ చేయడంలో సంతృప్తిపడవలెను. ఇట్లా కొన్ని అంశాలనే తీసుకొంటే ప్రతిచయన దత్తాంశ సేకరణ అని పించుకొంటుంది. ఒక విషయాన్ని తెలుసుకోవడానికి ఏవ్యక్తి అయినా, వ్యాపారసంస్థ అయినా ప్రభుత్వసంస్థ అయినా మొట్టమొదటిసారిగా సేకరించిన దత్తాంశము ప్రధానదత్తాంశము లేదా ప్రాథమిక దత్తాంశ మనిపించుకొంటుంది. ఈ దత్తాంశాము లోగడ ఏ సంస్థ సేకరించి ఉండదు. ప్రాథమిక దత్తాంశము గణాంకవిచారణకు ముడిసరుకు వంటిది మొట్ట మొదటిసారిగా సేకరించినది. ఈ పద్ధతిలో గణాంకశోధకుడు తనంతతాను ఓర్పుతోను, జాగ్రత్తగాను గమనించిన విషయాలను సేకరిస్తాడు. అతడే స్వయంగా విచారణ సమస్యను పరిశీలిస్తాడు. అతడు భోగట్టానిచ్చేవారితో కలిసిమెలిసి తిరిగి కావలసిన విషయాల పై తగిన దత్తాంశాన్ని సేకరిస్తాడు లేదా గణాంకశోధకుడు భోగట్టానిచ్చేవారిని ముఖాముఖీగా కలుసుకొని మాట్లాడి దత్తాంశాన్ని సేకరిస్తాడు. గణాంకశోధకుడు స్వయంగా దత్తాంశాన్ని సేకరించడంవల్ల అటువంటి విచారణ సంపూర్ణంగా ఉంటుంది.

1.4.1 ప్రత్యక్షశోధన ప్రయోజనాలు:

1. ఇందులో అసలు దత్తాంశాన్ని గ్రహించే వీలున్నది. 2. ఒక సమస్యపై వాస్తవికరూపము ఏర్పడుతుంది. 3. ఖచ్చితమైన దత్తాంశాన్నే సేకరించడానికి వీలుంది. 4. సేకరణలో ఏకరూపత ఉంటుంది. 5. స్వయంగా దత్తాంశాన్ని సేకరించడంవల్ల ద్వితీయ మూలములపై ఆధారపడనక్కరలేదు. 6. సంపూర్ణ శోధనకు ఈ పద్ధతి చాలా మంచిది.

లోపాలు:

1. ఇందులో దత్తాంశానికి పరిమితమైన విలువే ఉంటుంది. 2. దత్తాంశసేకరణకు ఎక్కువకాలం వృధా అవుతుంది. 3. దత్తాంశ సేకరణకు ధనవ్యయం కూడా ఎక్కువే. 4. విస్తృత విచారణలకు ఈ పద్ధతి వాడరు 5. గణాంక శోధకుడు పాక్షికదృక్పథం ప్రదర్శిస్తే సరియైన ఫలితాలు రావు. గణాంక శోధకుడు తెలిసిగాని, తెలియకగాని పక్షపాతబుద్ధితో వ్యవహరించే అవకాశాలున్నాయి. ప్రత్యక్ష వ్యక్తిగత శోధన వీలుపడనప్పుడు పరోక్షశోధనాపద్ధతిని ఉపయోగించవలె. గణాంకవిచారణ పరిధి విస్తృతంగా ఉన్నప్పుడు పరోక్ష మౌఖికవిధానాన్ని ఉపయోగించవలెను. ఇందులో విచారణ గురించి పూర్తి భోగట్టాలు చెప్పగలిగే వ్యక్తులనే ప్రశ్నించి కావలసిన దత్తాంశము సేకరించడం జరుగుతుంది. తరువాత ఒక విచారణకు సంబంధించిన ముఖ్య ప్రశ్నలు తయారుచేసి, ఆ ప్రశ్నావళిని కొందరి వ్యక్తులకు పంపి (తెలిపి) వారిచ్చిన జవాబులను రికార్డు చేస్తారు. ఉదాహరణకు ప్రభుత్వం నియమించిన కమీషను, కమిటీలు ఈ పద్ధతినుపయోగించి దత్తాంశ సేకరణచేస్తాయి. ఈ పరోక్ష పద్ధతిలో సేకరించిన దత్తాంశపు కచ్చితము, సాక్ష్యం ఇచ్చిన వ్యక్తుల నైజగుణాలపై ఆధారపడుతుంది. గణాంకశోధకుడు వ్యక్తుల సాక్ష్యంపై పూర్తిగా ఆధారపడరాదు. కొందరు వ్యక్తులు నిజాయితీగాను, నిష్పాక్షికంగాను ఉంటారు. అయినప్పటికి వారిచ్చే సాక్ష్యాలు వారి స్వాభావిక అంతరంగిక మనస్తత్వం మీద ఆధారపడతాయి.

1.5 షెడ్యూళ్ళు:

ఒక విచారణకు సంబంధించిన దత్తాంశ సేకరణ కోసం ప్రభుత్వం ప్రయివేటు వ్యక్తులు, సంస్థలు, పరిశోధకులు కొన్ని ప్రశ్నల జాబితా గల ఒకే నమూనా షెడ్యూళ్ళను తయారుచేస్తారు. ఈ షెడ్యూళ్ళను గణకులు నింపుతారు. కాబట్టి ఈ పద్ధతిలో మంచి గణకులను ఎన్నుకొని వారి కి షెడ్యూళ్ళను నింపే శిక్షణ ఇవ్వవలెను. గణకులకు షెడ్యూళ్ళను ఇచ్చి భోగట్టా తెలిసిన వారిని వ్యక్తిగతంగా కలుసుకోమని చెప్పవలెను. గణకులు భోగట్టా తెలిసినవారిని ప్రశ్నించి వారిచ్చిన సమాధానాలు రికార్డుచేస్తారు. ఉదాహరణకు భారత ప్రభుత్వము పదిసంవత్సరాల కొకసారి జనాభా లెక్కలు గణకుల ద్వారా సేకరిస్తుంది. దీనిలో విజయము గణకులపైనే పూర్తిగా ఆధారపడుతుంది. గణకులకు తగిన విద్య ఉండవలెను. వారికి మంచి శిక్షణ కూడా ఇవ్వవలె. అవసరమైతే వారికి కొంత ప్రతిఫలం కూడా ఇస్తే బాగుంటుంది.

1.6 ప్రశ్నావళి :

అసలు దత్తాంశాన్ని సేకరించడానికి ప్రశ్నావళులు ఉపయోగిస్తారు. సరైన మూలశోధన చేయవలెనంటే షెడ్యూళ్ళను, ప్రశ్నావళులను తయారుచేయవలెను. గణాంక విచారణలోని విషయానికి సంబంధించిన పూర్తి సమాచారాన్ని రాబట్టేందుకు అనువైన ప్రశ్నల జాబితాను తయారు చేస్తారు. ఈ ప్రశ్నల జాబితానే ప్రశ్నావళి అని అంటారు. ప్రశ్నావళిని సమాచారము ఇచ్చువారికి పోస్ట్ ద్వారా గాని, మరొక విధంగా గాని పంపించి, వాటిని నింపి తిరిగి పంపించమని అర్థిస్తారు. కాబట్టి ప్రశ్నావళిని భోగట్టానిచ్చే వారే నింపుతారు. కొన్ని సార్లు ప్రశ్నావళిని నింపడంలో సహాయపడేందుకు గణకులను పంపడం కూడా జరగవచ్చు. నింపిన ప్రశ్నావళిని ఒక నిర్ణీత కాలంలోపల పంపించమని ప్రార్థిస్తూ వారిచ్చిన భోగట్టా రహస్యంగా ఉంచుతామని హామీఇస్తూ ఒక ఉత్తరము వ్రాయవలె ఆ ఉత్తరానికి ప్రశ్నావళిని జతపరిచి పంపవలెను. నింపిన ప్రశ్నావళులను పంపించుటకు తగినన్ని తపాళాబిళ్ళలంటించిన కవరును కూడా పంపిస్తే మంచిది.

భోగట్టానిచ్చేవారు విద్యావంతులు, సహకరించేవారు, వారు అయితే ఈ పద్ధతి అనువైంది. భోగట్టానిచ్చేవారు నిరక్షరాస్యులైన ఈ పద్ధతి పనికిరాదు. పద్ధతిలో దత్తాంశ సేకరణ వ్యయం తక్కువ, నియమిత కాలంలోనే దత్తాంశాన్ని సేకరించే వీలున్నది కాబట్టి ఈ పద్ధతిని విరివిగా ఉపయోగిస్తున్నారు. చదువను, వ్రాయను రానివారికి ఈ పద్ధతి వర్తించదు. విద్యావంతులైన వారు భోగట్టానివ్వగల వారికి పంపిన ప్రశ్నావళులన్నీ తిరిగి వస్తాయన్న నమ్మకం లేదు. సాధారణంగా, పంపిన వాటి కన్నా భోగట్టా తెలిసిన వారు కూడా కొందరు ప్రశ్నావళిని జాగ్రత్తగా నింపరు. పంపిన ప్రశ్నావళులను లెక్కచేయరు. మరికొందరు నింపిన వాటిని తిగిరి పంపరు. కొన్ని సార్లు ఇచ్చిన భోగట్టా సరియైనది, యథార్థమైనది కాకపోవచ్చు. అయితే ఈ పద్ధతిని మెరుగుపరచవలె నంటే మంచి ప్రశ్నావళిని సిద్ధంచేయవలెను. ప్రశ్నలు సూటిగాను, తక్కువగా ఉండవలెను. ప్రశ్నావళిని తిప్పి పంపడానికి తపాళా బిళ్ళలను పంపించవలెను. అవసరమనుకున్న దానికంటే ఎక్కువ మందికి ప్రశ్నావళులను పంపవలెను.

1.6.1 ప్రశ్నావళి తయారీలో గమనించవలసిన కొన్ని ముఖ్యాంశాలు

1. వ్యక్తిగత అహంకారము, పలుకుబడులకు తావు ఇవ్వరాదు 2. ఉద్రిక్తమైన ప్రశ్నలు వేయరాదు. దానివల్ల జవాబులో పక్షపాతం దొర్లే అవకాశాలున్నాయి. 3. సాధ్యమైనంతవరకు ప్రశ్నలకు జవాబులు, అవునా, కాదా అని చెప్పగలిగే వీలున్నట్లుగా ఉండవలెను. అది సాధ్యం కాకపోతే ప్రశ్నకు ఎదురుగా ఖాళీ స్థలము వదలవలెను. 4. వేర్వేరు భావాలకు లోనైన ప్రశ్నకు, వేర్వేరు ప్రశ్నలు ఉపయోగించవలెను. 5. అనేక రకాలనైన ప్రత్యుత్తర గర్భిత ప్రశ్నలు వేయరాదు 6. బహుమతులు గానీ మరి ఏ ఇతర రకమైన ప్రోత్సాహకాలు గానీ ప్రశ్నావళి నింపేవారికి ఇస్తామని చెప్పరాదు. 7. ప్రశ్నావళి సంక్షిప్తంగా, సమగ్రంగా, చూడ ముచ్చటగా ఉండవలెను. 8. పూర్తి నిర్వచనాలు కావలసిన సాంకేతిక పదాలను వాడరాదు. 9. ప్రశ్నలకిచ్చే సమాధానాలు సులభంగా పట్టీ కరణ చేయడానికి వీలుగా ఉండవలె 10. ప్రశ్నలు స్పష్టంగా ఉండవలెను. 11. సందిగ్ధ ప్రశ్నలు వేయరాదు. 12. ప్రశ్నలు సులభంగా బోధపడేటట్లు ఉండవలెను. ప్రజలు ప్రశ్నావళి నింపడానికి ఎక్కువకాలము వృధాపరచడానికి ఒప్పుకోరు. అందువల్ల ప్రశ్నావళి చిన్నదిగాను, స్పష్టంగాను, క్లుప్తంగాను ఉండవలెను. దీర్ఘ ప్రశ్నలు చిక్కు ప్రశ్నలు ప్రశ్నావళిని నింపేవారిని చికాకు కలిగిస్తాయి. వారు సమాధానాలు ఇవ్వకపోవచ్చును లేదా అజాగ్రత్త సమాధానాలు ఇవ్వవచ్చు. 13. ప్రశ్నలు తక్కువగా ఉండవలెను. అట్లాగని దత్తాంశ సేకరణను భంగపరచరాదు. అట్లాగే ఎక్కువ ప్రశ్నలు వేసి జవాబులిచ్చే వారి ఓర్పును పరీక్షించరాదు. 14. జవాబులిచ్చేవారి వ్యక్తిగత భోగట్టాలు రహస్యపుభోగట్టాలు అడగరాదు. 15. ప్రశ్నలకు సమాధానాలు సూటిగా ఇవ్వగలిగేటట్లు ప్రశ్నలు వేయవలెను. వ్యక్తిగత అభిప్రాయాలకు తావిచ్చే ప్రశ్నలు వేయరాదు 16. ప్రశ్నలను క్రమపద్ధతిలో హేతుబద్ధంగా అమర్చవలెను. 17. ప్రశ్నలకిచ్చే సమాధానాలను సన్నిహితం చేసి సత్యాన్ని నిరూపించే విధంగా ప్రశ్నలు తయారు చేయవలెను. 18. జవాబులిచ్చేవారి సహకారాన్ని అర్థించవలెను. 19. ప్రశ్నావళిని నింపే విధానాన్ని కూడా సూచించవలెను. 20. జవాబులివ్వడానికి ప్రత్యేక శిక్షణ కావలసిన అవసరమును కల్పించరాదు.

ప్రభుత్వం కాని, ఒక వ్యాపార సంస్థకాని, ఒక ప్రయివేటు వ్యక్తి కాని, లోగడ సేకరించి విశ్లేషించిన దత్తాంశాన్ని గణాంక విచారణలో ఉపయోగిస్తే దానిని ద్వితీయ దత్తాంశ మంటారు. ఉదాహరణకు ప్రభుత్వము, ప్రజలలో స్త్రీ పురుష భేదము, వయస్సు, అక్షరాస్యత, వృత్తి మొదలైన విషయాలమీద దత్తాంశాన్ని సేకరిస్తుంది. ఇటువంటి విచారణను జనాభా దర్యాప్తు విచారణ అంటాము. సేకరించిన దత్తాంశాన్ని విశ్లేషించి ప్రభుత్వము ఫలితాలను ప్రచురణ చేస్తుంది. ప్రభుత్వం దృష్ట్యా ఈ దత్తాంశము ప్రధాన దత్తాంశమే. కాని ఒక సాంఘిక పరిశోధకుడు ఈ దత్తాంశాన్ని ఒక సమస్యను అధ్యయనం చేయడానికి ఉపయోగిస్తే ఈ దత్తాంశమే ద్వితీయ దత్తాంశమనిపించుకొంటుంది. ద్వితీయ దత్తాంశము పలుతావులనుంచి సేకరించవచ్చు. 1. కేంద్ర ప్రభుత్వము రాష్ట్ర ప్రభుత్వము, స్థానిక ప్రభుత్వ ప్రచురణలు 2. ప్రభుత్వము నియమించిన కమీషన్ల రిపోర్టులు. 3. కొన్ని సంస్థలు నియమించిన కమీషన్ల రిపోర్టులు ఉదాహరణకు రిజర్వు బ్యాంకు నియమించిన సెంట్రల్ బాంకింగ్ ఎంక్వయిరీ కమిటీ 4. విదేశ ప్రభుత్వ ప్రచురణలు అంతర్జాతీయ సంస్థల ప్రచురణలు ఉదాహరణకు మొదలైన వాటి ప్రచురణలు 5. వాణిజ్య సంస్థలు, కార్మిక సంఘాలు, కంపెనీలు, షేరు మార్కెట్టుల ప్రచురణలు, రిపోర్టులు 6. ఆర్థిక విషయాలను గురించి ఉన్న ప్రచురణలు ఉదాహరణ మొదలైన ఎకనామిక్ టైమ్స్ భారతదేశపు పత్రికలు 7. దిన పత్రికలు, మాస పత్రికలు 8. సాంఘిక పరిశోధకుల ప్రచురణలు, సాంఘిక సంస్థల ప్రచురణలు. విశ్వవిద్యాలయ ప్రచురణలు.

ద్వితీయ దత్తాంశాన్ని వాడుటకును కొన్ని జాగ్రత్తలు తీసుకోవలెను. గణాంక పరిశోధకుడు దత్తాంశాన్ని పూర్తిగా పరీక్షించవలెను. మూలదత్తాంశము సేకరించిన వ్యక్తి నమ్మదగిన వాడా, కాడా, అతనికి సత్యాలను సేకరించే శక్తి ఉన్నదా, లేదా అని యోచించవలెను. తరువాత ఈ క్రింది విషయాలను గమనించవలెను. 1. అసలు దత్తాంశాన్ని సేకరించటంలో ఉద్దేశము. 2. ప్రస్తుత గణాంకవిచారణ పరిధి 3. గణాంకాలు సేకరించిన తావులు. 4. దత్తాంశసేకరణలో సేకరించిన పద్ధతి 5. అసలు దత్తాంశంలో సాధించిన కచ్చితము ఈ విషయాలపై గణాంకశోధకుడు పరీక్షచేస్తే అసలు దత్తాంశాన్ని ప్రస్తుత గణాంకవిచారణలో ఎంతవరకు ఉపయోగపడుతుందన్న విషయము తెలుస్తుంది.

1.7 ప్రతిచయనము :

గణాంకపద్ధతుల ద్వారా విషయాలను తెలుసుకోవడానికి, జ్ఞానాన్ని సంపాదించడానికి గణాంకవిచారణలు చేస్తారు. గణాంకశోధన మొత్తం వర్గాన్ని జనాభా అంటారు. ఒక వర్గంలో నుంచి సేకరించిన కొన్ని అంశాలను ప్రతిచయనాలు అంటారు. గణాంకవిచారణలో దత్తాంశాన్ని జనాభా దర్యాప్తు పద్ధతి ద్వారా సేకరిస్తే ఒక వర్గానికి సంబంధించిన అన్ని విషయాలు పూర్తిగా తెలుస్తాయి. ఈ పద్ధతివల్ల ప్రయోజనాలే 1. విచారణఫలితాలు సంపూర్ణగా ఉంటాయి 2. వ్యక్తి గత సాక్షికానికి తావు తక్కువ. 3. ఇందులో చేసిన నిర్ణయాలకు సంపూర్ణతవల్ల వచ్చే బలం చేకూరుతుంది కాని ఈ పద్ధతిలో కొన్ని లోపాలు కూడా ఉన్నాయి.1. దత్తాంశాన్ని సేకరించడానికి ఎక్కువ కాలం పడుతుంది 2. దత్తాంశాన్ని సేకరించడంలో అనేక కష్టాలకు గురిఅవుతాము 3. దత్తాంశాన్ని సేకరించడానికి హెచ్చు ఖర్చు అవుతుంది. పై మూడు లోపాల వల్ల దత్తాంశసేకరణలో దోషాలు వచ్చే అవకాశం ఉంది. 4. ఇందులో అనేక మంది వ్యక్తుల సేవలను పొందవలెను. 5. ఈ పద్ధతి అన్ని వేళల సాధ్యపడదు. 6. దత్తాంశసేరణకు తర్ఫీదు పొందిన గణకులు లభ్యము కావడం కష్టము. జనాభా దర్యాప్తు పద్ధతిలో అనేక లోపాలు, కష్టాలు, ఉండడంవల్ల ప్రతిచయన విచారణ పద్ధతి అవలంబిస్తున్నారు.

1.7.1 మంచి ప్రతిచయ ఎనానికి ఉండవలసిన లక్షణాలివి:

1. మొత్తం జనాభాలో గల అన్ని అంశాలు స్వతంత్ర్యంగా ఉండి, ప్రతి అంశము ప్రతిచయనంగా తీసుకొనే అవకాశం ఉండవలెను. 2. ప్రతిచయనము మొత్తం జనాభాకు ప్రాతినిధ్యము వహించవలెను. ప్రతిచయనము జనాభాలో ఒక భాగానికే ప్రాతినిధ్యము వహిస్తే చాలదు. 3. ప్రతిచయనం వ్యక్తిగత పక్షపాతానికి తావివ్వకూడదు. 4. సులభంగా సేకరించడానికి వీలయ్యే అంశాలనే ప్రతిచయనాలుగా తీసుకోకూడదు. అట్లా తీసుకొనే ముందు వాటి గుణగణాలను కూడా తెలుసుకోవలెను. 5. ఎక్కువ ప్రతిచయనాలు తీసుకొంటే ఫలితాలలో ఖచ్చితత్వము హెచ్చుగా ఉంటుందన్న విషయము అందరికీ తెలిసిందే.

1.7.2 ప్రతిచయన విచారణ వల్ల అనేక ప్రయోజనాలున్నాయి:

1. దత్తాంశము తక్కువ వ్యవధిలో, తక్కువ శ్రమతో సేకరించడానికి వీలున్నది. 2. ఈ విచారణలో ఖర్చుకూడ తక్కువ. దీనిలో కూడ కోరిక మేరకు ఖచ్చితంగా ఫలితాలు వస్తాయి. 3. ఇందులో ఫలితాలు జనాభా దర్యాప్తు విచారణ పద్ధతి ఫలితాలకంటె సాధారణంగా మెరుగ్గా ఉంటాయి. 4. దత్తాంశ సేకరణ కొద్దిమంది గణకులతో జరుపవచ్చు. 4. గణాంక శోధనా నిర్వహణ శాస్త్రీయ పద్ధతులలో జరుగుతుంది.

1.8. ప్రతిచయన పద్ధతులు

1.8.1 యాదృచ్ఛిక ప్రతిచయనము :

యాదృచ్ఛిక ప్రతిచయనాన్ని అదృష్టపు ప్రతిచయనము అని, సంభావ్యతా ప్రతిచయనము అని కూడా అంటారు. జనాభాలోని ప్రతి అంశానికి ప్రతిచయనంగా ఎన్నుకోబడేందుకు సమాన అవకాశమిస్తూ యాదృచ్ఛికంగా ఎన్నుకొన్న ప్రతిచయనాన్ని యాదృచ్ఛిక ప్రతిచయన మంటారు. ఈ పద్ధతిలో జనాభాలోని ప్రతి అంశానికి ప్రతిచయనమయ్యే అవకాశము మాత్రం ఉంటుంది. ప్రతిచయనము మొత్తం జనాభాకు ప్రతినిధి. ప్రతిచయనాన్ని యాదృచ్ఛికంగా ఎన్నుకొన్నట్లయితే, ప్రతిచయన పరిమాణం సరిపడినంత పెద్దదిగా ఉన్నట్లయితే అట్టి ప్రతిచయనము జనాభాలోని అన్ని అంశాలకు ప్రాతినిధ్యం వహిస్తుంది. అందువల్లే యాదృచ్ఛిక ప్రతిచయనాన్ని ప్రాతినిధ్య ప్రతిచయనము అని కూడా కొన్నిసార్లు పిలుస్తారు.

1.9 యాదృచ్ఛిక ప్రతిచయనాన్ని ఎన్నుకొనే పద్ధతులు:

యాదృచ్ఛిక ప్రతిచయనాన్ని లాటరీ పద్ధతి ద్వారా గాని, యాదృచ్ఛిక సంఖ్యల పట్టీల ద్వారా గాని ఎన్నుకొంటారు.

1.9.1 లాటరీ పద్ధతి :

ఇది ఎక్కువ ప్రచారంలో ఉన్న పద్ధతి. అదృష్టపు బహుమతుల విజేతలను ఈ పద్ధతి ద్వారానే ఎన్నుకొనటం మనం చూస్తున్నాము కదా. ఈ పద్ధతిలో జనాభాలోని అన్ని అంశాల నంబర్లుగాని, పేర్లుగాని చిన్న చిన్న కాగితపు చిట్టీలు మీదగాని లేదా చిన్నచిన్న అట్టముక్కలు మీదగాని వ్రాస్తారు. కాగితపు చిట్టీలు అయితే వాటిని మడవవలెను. తరువాత వాటిని ఒక డబ్బాలో వేసి

బాగా కలపవలెను. వీటిని ఎప్పటికప్పుడు బాగా కలుపుతూ, ప్రతిచయన పరిమాణానికి కావలసినన్ని చిట్టీలను లేదా కార్డులను కళ్ళకు గంతలు కట్టిన వ్యక్తిచేత తీయించవలెను. బయటకు తీసిన చిట్టీలలోని అంశాలు ప్రతిచయనాలు.

1.9.2 యాదృచ్ఛిక సంఖ్యా పట్టీలు :

జనాభా ఎక్కువగా ఉండే విచారణలలో లాటరీ పద్ధతి శ్రమతో కూడినట్టిది అట్లాంటప్పుడు యాదృచ్ఛిక ప్రతిచయనాన్ని ఎన్నుకోవడానికి ప్రత్యామ్నాయపద్ధతి యాదృచ్ఛిక సంఖ్యల పట్టీ. ఇందులో 1. టిప్పెట్ అనే గ్రంథకర్త తయారుచేసిన యాదృచ్ఛిక సంఖ్యల పట్టీ 2. ఫిషర్, యేట్స్ సంఖ్యలు 3. కెండాల్, బాబింగ్‌టన్ సంఖ్యలు 4. ర్యాండ్ కార్పొరేషన్ సంఖ్యలు మొదలైనవి ఉన్నాయి. వీటిలీ టిప్పెట్ సంఖ్యలు బాగా ప్రచారంలో ఉన్నాయి. టిప్పెట్ జనాభా లెక్కల నివేదికల నుండి తీసుకొన్న 41,600 అంకెలు ను 10,400 నాలుగంకెల సంఖ్యలు చేసి పట్టీ తయారుచేసినాడు. ఈ క్రింద మొదటి 40 అంశాలను ఉదాహరనకు ఇచ్చినాము.

952	664	392	992	769	591	317	562
167	952	155	196	703	535	130	269
370	748	048	262	363	108	691	769
560	524	112	607	608	812	423	877
754	914	145	925	702	611	881	644

ఈ సంఖ్యలు అస్తవ్యస్తంగా ఉన్నట్లు కనిపించినా, వాటి యాదృచ్ఛికత అనేక పరీక్షలద్వారాను, ఆచరణ రూపంలోను నిరూపించబడింది. ఈ పట్టీని ఉపోయోగించే పద్ధతిని ఉదాహరణ పూర్వకంగా తెలుసుకొందాము. లోగడ ఉదాహరణలోని 300 మంది విద్యార్థులలో 30 మందిని ఎన్నుకొనుటకు మొదట ఈ అంశాలకు 001 నుంచి 300 మంది వరకు నంబర్లు వ్రాయవలెను. తర్వాత టిప్పెట్ పట్టీలోని ఏదో ఒక పేజీచూచి అందులో 300 కు లోపున్న సంఖ్యలనుండి 30 సంఖ్యలు తీసుకోవలె. ఈ సంఖ్యలే ప్రతిచయనాలు.

12.9.3 యాదృచ్ఛిక ప్రతిచయన పద్ధతివల్ల ప్రయోజనాలు :

1. వ్యక్తి గత పాక్షికతకు తావులేదు. 2. యాదృచ్ఛిక ప్రతిచయనం మొత్తం జనాభాకు మంచి ప్రాతినిధ్యం వహిస్తుంది 3. గణాంకశోధకుడు తన అంచనాలో గల యథార్థత నిర్ణయించుకోగల్గుతాడు. ఎందుకంటే ప్రతిచయన దోషాలు అవకాశ సూత్రాల మీద ఆధారడి ఉంటాయి.

1.10 స్థిరిత యాదృచ్ఛిక ప్రతిచయనము:

ఈ పద్ధతిలో మొత్తం జనాభాకు ఏదో ఒక లక్షణం లేదా లక్షణాల ఆధారంగా కొన్ని వర్గాలుగా లేదా గుంపులుగా విభజిస్తారు. అంటే విజాతీయంగా ఉన్న జనాభాను సాధ్యమైనంత సజాతీయ వర్గాలుగా విభజించవలెను. ఒక్కొక్క వర్గం లోని అంశాల మధ్య సాధ్యమైనంత సజాతీయత (సమానపోలికలు) ఉండేటట్లు, వర్గాల మధ్య సాధ్యమైనంత వ్యత్యాస ముండేటట్లు విభజించడంవల్ల జనాభా మొత్తం అనేక వర్గాల కింద విడిపోతుంది. తర్వాత ప్రతి వర్గం నుండి యాదృచ్ఛిక పద్ధతిని ప్రతిచయనాన్ని ఎన్నుకొంటారు. సాంఘిక, ఆర్థిక విచారణలలో ఈ పద్ధతిని విరివిగా ఉపయోగిస్తారు. ఏక పక్ష సంభవనీయత తగ్గడం వల్ల, ఒక నిర్ణీత పరిమాణం గల ప్రతిచయనాలను తీసుకోదలిస్తే, స్వచ్ఛమైన యాదృచ్ఛిక పద్ధతి కంటే స్థరిత యాదృచ్ఛిక పద్ధతి మెరుగయింది. ఈ పద్ధతి ద్వారా సేకరించిన దత్తాంశంలో ఖచ్చితత్వం ఎక్కువగా ఉంటుంది.

1.11 గుచ్ఛ యాదృచ్ఛిక ప్రతిచయనము :

ఈ పద్ధతిలో కూడా స్థరిత ప్రతిచయనంలోవలె, జనాభాను కొన్ని గుంపులుగా లేదా గుచ్ఛాలుగా విభజిస్తారు. స్థరిత ప్రతిచయనములో, ప్రతి గుచ్ఛంలో ఒకే పోలికలు ఉన్న అంశాలనుచేర్చి విభజిస్తే, గుచ్ఛ ప్రతిచయనములో, ప్రతి గుచ్ఛంలోను సాధ్యమైనంత విజాతీయత ఉండేటట్లు వర్గీకరిస్తారు. అంటే ప్రతిగుచ్ఛంలోను జనాభాలోని అన్ని లక్షణాలు సాధ్యమైనంత వరకు ఉండవలెను. గుచ్ఛాల మధ్య వ్యత్యాసం సాధ్యమైనంత తక్కువగా ఉండవలెను. అప్పుడు గుచ్ఛాలన్నీ దాదాపు ఒకేవిధంగా ఉంటాయి. తరువాత ఈ గుచ్ఛాలలో ఒకటిగాని, లేదా కొన్నిగాని యాదృచ్ఛిక పద్ధతిన ప్రతిచయనంగా తీసుకొని అధ్యయనం చేస్తారు. ఈ

పద్ధతిలో ఉన్న ముఖ్యమైన లాభము ఖర్చుతక్కువ. కాని ఇందలి ప్రధానమైన లోపము ఖచ్ఛితత్వము తక్కువ.

1.12 క్రమ ప్రతిచయనము:

ఇది పరిమిత యాదృచ్ఛిక ప్రతిచయనము. ఎన్నుకోవడానికి సులభ పద్ధతి. ప్రతిచయనం ఎన్నుకొనే జనాభా మొత్తం జాబితా లభ్యమయ్యే సందర్భాలలో ఈ పద్ధతి ఉపయోగకారి. పై రెండు పద్ధతుల్లో జనాభా వర్గాలకింద విభజించినట్లుగా గాక, ఈ పద్ధతిలో జానాభాను ఒకక్రమ పద్ధతిలో అంటే అకారాది క్రమంలోగాక, భౌగోళిక క్రమంలోగాని లేదా మరో క్రమపద్ధతిలోగాని అమర్చవలెను.

$$\text{ప్రతిచయనాల మధ్య అంతరము} = \frac{\text{జనాభా పరిమాణము}}{\text{ప్రతిచయన పరిమాణము}}$$

తరువాత, ప్రతిచయనాన్ని తీయడం ఎక్కడనుంచి మొదలు పెట్టవలె అనే విషయాన్ని యాదృచ్ఛిక పద్ధతి ప్రకారం తెలుసుకోవలెను. తరవాత ఏ అంశాలు ప్రతిచయనాలలో తెలిసిపోతుంది. ఉదా: ఒక కాలేజీలోని 100 మంది వాణిజ్య శాస్త్ర విద్యార్థులలో 10 మందిని ఎన్నుకోవాలనుకుందాము. మొదటి వారిపేర్లు అక్షరాది క్రమంలోగాని, లేదా తరగతి క్రమసంఖ్య క్రమంలోగాని మొత్తం 100 మంది జాబితాను తయారుచేయవలెను. మొత్తం జనాభా 100. ప్రతిచయనం 10 కాబట్టి ప్రతిచయనాల మధ్యదూరము 10 (100/10) అంటే ప్రతిపదో విద్యార్థికి ప్రతిచయనంలో చేరే అవకాశముంది. ఇప్పుడు ప్రతిచయనపు ఎన్నిక ఎక్కడనుంచి మొదలు పెట్టలి అనేది నిర్ణయించాలి. ప్రతిచయనాల మధ్య అంతరము 10 కాబట్టి మొదటి 10 లోపల ఎక్కడైనా ప్రారంభించవచ్చు. కాని అది యాదృచ్ఛిక పద్ధతిపై జరగాలి. లాటరీ వేస్తే 6వ విద్యార్థి వచ్చాడనుకొందాము. ఇప్పటినుంచి ఏ ఏ విద్యార్థులు ఎన్నుకోబడ్డారో తెలిసిపోతుంది. అంటే 6, 16, 26, 36, 46, 56, 66, 76, 86, 96,. విద్యార్థులు ప్రతిచయనాలు.

1.13. అయాదృచ్ఛిక ప్రతిచయనము :

ఈ పద్ధతి చాలా సులభమైనది, తేలికైనది. ఫలితాలుకూడా సాధారణంగా, ఎక్కువ ఖచ్చితంగానే ఉంటాయి. దత్తాంశాన్ని క్రమ పద్ధతిలో అమర్చేటప్పుడు జాగ్రత్త తీసుకొంటే స్థిరిత యాదృచ్ఛిక ప్రతిచయనపు ప్రయోజనాలను కూడా పొందవచ్చు. కాని క్రమ పద్ధతిలో అమర్చేటప్పుడు చాలా జాగ్రత్తగాను, నిష్పాక్షికంగాను ఉండవలెను. లేకుంటే వ్యక్తిగత పాక్షికతకు, అవిశ్వసనీయ ఫలితాలకు అవకాశ మేర్పడుతుంది. ప్రతి చయనాన్ని యాదృచ్ఛికంగా లేదా అదృష్టపు ఎన్నిక ద్వారా కాకుండా, శోధకుడే ప్రతిచయనాన్ని ఎంచుకోవడం గురించి తెలుసుకొందాము. ఇందులో యాదృచ్ఛికత లేదు కాబట్టి అయాదృచ్ఛిక ప్రతిచయన మంటారు. ఈ పద్ధతిని ఉద్దేశ పూర్వక ప్రతిచయనము అని బుద్ధిపూర్వక ప్రతిచయనము అని నిర్ణయ ప్రతిచయనము అని కూడా అంటారు. ఈ పదాలన్నీ కావాలని లేదా బుద్ధిపూర్వకంగా కోరుకొని ప్రతిచయనాన్ని ఎన్ను కొంటారు, అని స్ఫురింపజేస్తున్నాయి గదా! ఈ పద్ధతిలో విచారణలోని అంశాలకు ప్రాతినిధ్యం వహిస్తాయి అని నిర్ణయించిన అంశాలను గణాంక శోధకుడు ఎంచుకొంటాడు. ఇందులో ప్రతిచయనాల ఎంపిక మూడు విధాలుగా జరగవచ్చు. అని 1. నిర్ణయ ప్రతిచయనము. 2. కోటా ప్రతిచయనము, 3. సౌలభ్య ప్రతిచయనము.

1.13.

1.13.1. నిర్ణయ ప్రతియనము : బాగా తెలిసిఉన్న ప్రతి చయనాలను అవి జనాభాలోని అంశాలకు ప్రాతినిధ్యం వహిస్తాయో లేదా అని, విచారణ ఉద్దేశానికి, అనుకొన్న అంశాలను ప్రతిచయనంగా శోధకుడు ఎంచుకొంటాడు.

1.13.2. కోటా ప్రతిచయనము: ఈ పద్ధతి మౌలికంగా స్థిరిత అయాదృచ్ఛిక ప్రతిచయనము. ఇందులో ప్రతిశోధకుడు సేకరించవలసిన ప్రతిచయనము మొత్తం కోటాను కొన్ని లక్షణాల ఆధారంగా జనాభాను కొన్ని వర్గాలుగా విభజించి ఒక్కొక్క వర్గంలో ఎన్ని అంశాలనుంచి సమాచారము సేకరించ వలెనో ఉపకోటాలను నిర్ణయిస్తారు. ఈ ఉపకోటాలు వెరశి, మొత్తం కోటాకు సమానము. అంటే ప్రతి గణాంకశోధకుడు ఒక్కొక్క వర్గం నుంచి కోటాప్రకారం కొన్ని అంశాలను ఎన్నుకొంటూ తనకు నిర్ణయించిన మొత్తం కోటా పూర్తి చేయవలసి ఉంటుంది.

1.13.3. సౌలభ్య ప్రతిచయనము : ఈ పద్ధతిలో, శోధకుడు, అతనికి వీలుగా, సౌలభ్యంగా ఉన్న అంశాలను ప్రతిచయనాలుగా తీసుకొని సమాచారాన్ని సేకరిస్తాడు. కాని ఇది అంతమంచి పద్ధతి కాదు.

1.13 అయాదృచ్ఛిక ప్రతిచయన పద్ధతిలోని లాభాలు:

జనాభాలోని కొద్ది అంశాలను మాత్రమే ప్రతిచయనంగా తీసుకొనేటప్పుడు యాదృచ్ఛిక ప్రతిచయన పద్ధతిలో కొన్ని ముఖ్యమైన అంశాలు ప్రతిచయనంలో చేరకపోవచ్చు. కాని ఈ పద్ధతిలో ప్రాముఖ్యమున్న అన్ని అంశాలను ప్రతిచయనంలో చేరకపోవచ్చు. కాని ఈ పద్ధతిలో ప్రాముఖ్యమున్న అన్ని అంశాలను నిర్ణయించి ప్రతిచయనాన్ని ఎన్నుకోవచ్చు. ఈ పద్ధతిలో ఖర్చు కావలసిన సమయము తక్కువ. కాని ఈ పద్ధతిలో ప్రతిచయనపు ఎన్నికలో అనేక లోపాలున్నాయి.

1.14 సారాంశము :

ఈ పాఠంలో వివిధ దత్తాంశసేకరణ పద్ధతులు, దత్తాంశసేకరణలో ప్రతిచయనము యొక్క ఆవశ్యకతను తెలుసుకొన్నాము. ఖర్చు, కాలవ్యవధి, భౌతిక సాధ్యాసాధ్యాలను పరిగణనలోనికి తీసుకొని, ప్రతిచయన పద్ధతిని ఎన్నుకుంటాము. సరళ యాదృచ్ఛిక ప్రతిచయనము వాస్తవ పరిశీలనలో సులభంగానే ఉంటుంది. కాని ఎక్కువ ప్రతిచయనములు తీసుకున్నపుడే చాలా కష్టముగా ఉంటుంది. ప్రతి అంశానికి ఎన్నుకొబడేందుకు సమాన అవకాశము ఉంటుంది. క్రమ ప్రతిచయన పద్ధతిలో యాదృచ్ఛిక ప్రారంభ సూచికతో మొదలుపెట్టిన మిగిలిన అంశములన్నియు క్రమపద్ధతిలో రావటం వలన ఒకే మాదిరి ప్రతిచయనము పొందగలము. ఆర్థిక దత్తాంశసేకరణలో వివిధ వర్గాల వర్గీకరణ జరిగినపుడు జనాభాను సాధ్యమైనంత వరకు సజాతీయ వర్గాలుగా విభజించవలెను. ఈ పద్ధతి ద్వారా సేకరించిన దత్తాంశములో ఖచ్చితత్వము ఎక్కువగా ఉంటుంది. గుచ్ఛ యాదృచ్ఛిక ప్రతిచయనములో ప్రతి గుచ్ఛములోను అన్ని లక్షణాలు ఉంటాయి. ఈ పద్ధతి ముఖ్యమైన ఖర్చు తక్కువ మరియు ఖచ్చితత్వము తక్కువగానే ఉంటుంది. అంతేకాకుండా ఈ పాఠంలో యాదృచ్ఛిక ప్రతిచయనముతో పాటు అయాదృచ్ఛిక ప్రతిచయన పద్ధతులు కూడా తెలుసుకొన్నాము.

1.15 స్వయం అధ్యయన ప్రశ్నలు:

1. అసెంబ్లీ ఎన్నికలప్పుడు ఓటరు మనోగతమును తెలుసుకొనుటకు ఎటువంటి ప్రశ్నావళిని కోరుకుంటాడు. వివరించండి.
2. ప్రతిచయన పద్ధతుల ఉపయోగములను సోదాహరణముగా వివరించండి.

1.16 చదువవలసిన పుస్తకాలు:

1. Fundamentals of Mathematical Statistics : S.C. Gupta, V.K. Kapoor, Publishers s. Chand & Co.
2. Basic Statistics : B.L. Agarwal, Third Edition, New Age International (p) Ltd.

పాఠం : 2

సహసంబంధము

(Correlation)

పాఠ్య నిర్మాణ క్రమము

2.1 ఉపోద్ఘాతం

2.2 సహసంబంధం - రకాలు

2.3 సహసంబంధ గుణకము

2.4 కోటి సహసంబంధము

2.5 సూక్ష్మ, పాక్షిక సహసంబంధ గుణకములు

2.6 సారాంశము

2.7 గుర్తుంచుకోవలసిన విషయాలు

2.8 స్వయం సమాధాన ప్రశ్నలు

2.9 సంప్రదించవలసిన పుస్తకాలు

లక్ష్యం :

ఈ పాఠం చదివిన తరువాత మీరు

- ద్విచలరాశులు
- సహసంబంధము వాటి ఉపయోగములు
- వివిధ సహసంబంధములు / ధన లేదా ఋణ సంబంధము, సరళరేఖా లేదా వక్రరేఖీయ సహసంబంధము
- వివిధ సహసంబంధ గుణకములను గణన చేయు పద్ధతులు
- కోటిసహసంబంధము
- సహసంబంధము యొక్క లక్షణములు
- పాక్షిక మరియు బహు సహసంబంధ గుణకములను గణన చేయుట.

గురించి తెలుసుకుంటారు.

2.1 ఉపోద్ఘాతం:

శ్రేణుల విశ్లేషణ గురించి సరిపోల్చి చదవడానికి, కేంద్రస్థానపు మానాలు, విస్తరణమానాలు, వైషమ్యం కూడా గణనచేసినాము. అయితే మనము ఇంత వరకు అధ్యయనం చేసిన అవి ఒకే ఒక్క చలనానికి సంబంధించినవి మాత్రమే. కాని ఆచరణలో రెండు లేదా రెండు కంటె ఎక్కువ చలనాలను ఉపయోగించవలసిన అనేక సమస్యలు వస్తాయి. ఉదాహరణకు భార్యా, భర్తల వయస్సులకు ఎత్తు, బరువులకు, వర్షపుదినాలకు, గొడుగుల అమ్మకాలకు ఉన్న సంబంధాన్ని తెలుసుకొనే కుతూహలం ఉండవచ్చు. ఎందువల్లనంటే సాధారణంగా భార్యల వయస్సు ఎక్కువ అయ్యేకొద్దీ భర్తల వయస్సు కూడా ఎక్కువకావడం, ఎత్తు ఎక్కువ అంటే పొడవుగా ఉన్న వ్యక్తుల బరువులు ఎక్కువగా ఉండడం, లేదా వర్షాలు ఎక్కువగాపడే రోజులలో గొడుగుల అమ్మకం ఎక్కువకావడం అనే రెండు (లేదా అంతకంటె ఎక్కువ) చలనాల మధ్యఉన్న సంబంధాన్ని తెలుసుకోవడానికి ఉపయోగపడే గణాంక సాధనను (Statistical tool)

సహసంబంధము (Correlation) అంటారు. కాబట్టి దర్యాప్తుదారు (శోధకుడు) సహసంబంధ విలువను వివరించేటప్పుడు తనదత్తాంశాన్ని క్షుణ్ణంగా అర్థంచేసుకొంటే వివరణలో వచ్చే దోషాలు తొలగిపోతాయి. అంటే సమస్యా పరిష్కారానికి అవసరమైన అన్ని విషయాలను బాగా తెలుసుకోవలె. అట్లా తెలుసుకొని చాలా అప్రమత్తతతో ప్రవర్తించి ఈ సాధనాన్ని (Tool) ఉపయోగించుకోవలె. అజాగ్రత్తగా ఉపయోగిస్తే సహసంబంధ విశ్లేషణము తప్పు మార్గాన్ని పట్టిస్తుంది.

కాబట్టి ఏవైనా రెండు చలరాశుల మధ్య పరస్పర మార్పు, అంటే ఒక చలరాశిలోని మార్పు (పెరుగుదల లేదా తగ్గుదల) ఇంకొక చలరాశిలో కూడా మార్పును కలిగించగలిగితే అటువంటి చలరాశుల మధ్య సహసంబంధం ఉందని అర్థం. ఇదేవిధంగా (ధర, సరఫరా), (ఉత్పత్తి, అవసరం), (ఆదాయం, వ్యయం) మొదలైనవి పరస్పర సంబంధాన్ని కలిగి ఉన్న చలరాశులే.

రెండు చలరాశులూ ఒకే దిశవైపు మార్పు చెందుతుంటే, అంటే రెండూ పెరుగుదలను లేదా తగ్గుదలను చూపుతుంటే అటువంటి చలరాశుల మధ్య ధనాత్మక సహసంబంధత ఉందని అర్థం. ఉదాహరణకు ఆదాయం పెరిగితే వ్యయం కూడా పెరుగుతుంది లేదా ఆదాయం తగ్గితే వ్యయం కూడా తగ్గుతుంది.

రెండు చలరాశులూ పరస్పర విరుద్ధ దిశలవైపు మార్పు చెందుతుంటే, అంటే ఒక చలరాశిలోని పెరుగుదల (లేదా తగ్గుదల) ఇంకొక చలరాశిలో తగ్గుదల (లేదా పెరుగుదల)ను చెందించగలిగితే అటువంటి చలరాశుల మధ్య రుణాత్మక సహసంబంధం ఉందని అర్థం. ఉదాహరణకు వస్తువుల ఉత్పత్తి లేదా సరఫరా పెరిగితే వాటి గిరాకీ (డిమాండు) లేదా ధర తగ్గుతుంది.

రెండు చలరాశులూ సమాన అంతరాలలో పెరిగితే లేదా రెండూ సమాన అంతరాలలో తగ్గితే వాటి మధ్య సంపూర్ణ ధనాత్మక సహసంబంధం ఉన్నదని అర్థం.

రెండు చలరాశులూ సమాన అంతరాలలో పరస్పర విరుద్ధ దిశలలో మార్పు చెందితే వాటి మధ్య సంపూర్ణ రుణాత్మక సహసంబంధం ఉందని అర్థం.

2.2 సహసంబంధము - రకాలు:

సహసంబంధము రెండు రకాలలో ఉండవచ్చు.

1. ధన లేదా ఋణ సంబంధము
2. లైనియర్ లేదా నాన్ - లైనియర్ సహసంబంధము (సరళరేఖా లేదా వక్రరేఖీయ సహసంబంధము).

ధన లేదా ఋణ సహసంబంధము:

సహసంబంధము ధనాత్మకము : రెండు చలనాలు ఒకే దిక్కులో ప్రయాణం చేస్తే వాటి మధ్య ఉన్న సహసంబంధాన్ని ధనాత్మకము అంటారు. ఉదాహరణకు ధరలు పెరిగితే సప్లయ్ కూడా పెరుగుతుందని. ధరలు తగ్గితే సప్లయ్ కూడా తగ్గుతుందని మనం చెప్పుకొంటే వాటి మధ్యఉన్న సంబంధము ధనాత్మకము అంటాము. రెండు చలనాలలో ఒక చలనం విలువ పెరిగితే రెండో చలనం విలువ తగ్గినట్లయితే ఆ రెండు చలనాల మధ్య సంబంధము ఋణాత్మకమంటారు. లేదా రెండు చలనాల విలువలు వ్యతిరేక దిక్కులలో చలిస్తే వాటి మధ్య ఉన్న సంబంధాన్ని ఋణ సహసంబంధము లేదా విలోమ సహసంబంధము (Inverse correlation) అంటారు.

లైనియర్ సరళరేఖా లేదా వక్రరేఖీయ (అసరళ) సహసంబంధము: రెండు చలనాలమధ్య విచరణము స్థిర నిష్పత్తిలో ఉంటే వాటిమధ్య సహసంబంధాన్ని లైనియర్ లేదా సరళరేఖా సహసంబంధమంటారు. అంటే ఒక చలనంలోని మార్పు రెండో చలనంలోని మార్పుకు సమాన నిష్పత్తిలో ఉండే అవి సరళరేఖా సహసం బంధంతో ఉన్నట్లు చెప్పవచ్చు. ఉదాహరణకు ధరల పెరుగుదల 20

శాతం అనుకుంటే సప్లయ్‌కూడా 20 శాతం పెరిగినప్పుడు వాటి మార్పు స్థిరనిష్పత్తిలో ఉన్నది. అట్లాంటి బిందువులతో రేఖా చిత్రపటం గీస్తే ఆ బిందువులు ఒక సరళరేఖవలె ఏర్పడతాయి.

సహసంబంధాన్ని అనేక గణాంకశాస్త్రవేత్తలు నిర్వచించినారు. కాని వాటి సారాంశమంతా ఒక్కటే. కాబట్టి కొన్ని నిర్వచనాలు ఇక్కడ ఇవ్వడమైంది.

"రెండు పరిమాణాలమధ్య సంబంధము, ఒకదానిలోని మార్పులకు, రెండోదానిలోని మార్పులు సహకరించినట్లునప్పుడు, అంటే ఒకదానిలో పెరుగుదలకు లేదా తరుగుదలకు రెండో దానిలో పెరుగుదల లేదా తరుగుదలకు సంబంధమున్నట్లు ఒక దాని పరిమాణంలో ఎంత ఎక్కువమార్పువస్తే రెండో దానిలో అంత ఎక్కువ పరిమాణంలో మార్పు వచ్చినట్లు కనబడినట్లయితే, ఆ రెండు పరిమాణాలమధ్య సహసంబంధము ఉంటుంది. అని బౌలే మహాశయుడు నిర్వచించినాడు. ఇంచుమించు ఇదే అర్థాన్ని ఇచ్చేటట్లు కోనార్ మహాశయుడు నిర్వచనము ఇచ్చినాడు. "రెండు లేదా అంతకంటె ఎక్కువ పరిమాణాలు సహకరించి చలించినప్పుడు అంటే ఒకదాని గమనాలకు అనురూపంగా మిగిలినదాని గమనాలు సమీపించి, అనుసరించి నప్పుడు రెండింటికి సహసంబంధము ఏర్పడుతుంది". రెండు చలనాల మధ్యసంబంధాన్ని సామాన్య సహసంబంధము (Simple correlation) అంటారు, ఇక్కడ 'సంబంధము' అనే పదము చలనాలు పరస్పరం ఆధారపడినట్లు తెలపడానికి ఉపయోగించడమైంది. అయితే పరస్పరం ఒకదాని మీద ఒకటి ఆధారపడటం వల్లనే రెండు శ్రేణులమధ్య సహసంబందము ఏర్పడకపోవచ్చు. ఒక్కొక్కప్పుడు ఒక శ్రేణిలోని మార్పులు, రెండో శ్రేణిలో మార్పులను తీసుకొని రావచ్చు. అట్లా రెండు శ్రేణుల మధ్య కార్య - కారణసంబంధము ఉండవచ్చు. ఉదాహరణకు మనము, వర్షపు రోజులు, గొడుగుల అమ్మకాలమధ్య చాలా ఎక్కువ డిగ్రీలో (స్థాయి) సంబంధము ఉన్నది అన్నప్పుడు వర్షపు రోజులు కారణం గాను, గొడుగుల అమ్మకము తత్‌కార్యం గాను ఉన్నవి. అంటే వర్షపురోజులు ఎక్కువ అయితే గొడుగుల అమ్మకము ఎక్కువ, లేదా వర్షపురోజులు తక్కువ అయితే గొడుగుల అమ్మకము తక్కువ అని చెప్పవచ్చు. ఇంకా ఎక్కువ సహ సంబంధమువున్నంత మాత్రంతో కార్య-కారణసంబంధము ఉన్నదని కూడా ఒక్కొక్కప్పుడు ఊహించనవసరంలేదని కూడా గుర్తించవలె. అయితే సహసంబంధము సార్థకమైన డిగ్రీలో ఉండటం ఏ ఒక్క కారణంచేతనైనా కావచ్చు, లైదా అనేక కారణాల వల్ల కూడా కావచ్చు.

సహసంబంధము ఒక్కొక్కప్పుడు రెండు శ్రేణులలో కాకతాళీయంగా జరిగింది నిజానికి ఆ రెండింటికి ఏ విధమైన సంబంధంలేదు. కాని అది నిరర్థక సహసంబంధము లేదా క్లుప్తంగా చెప్పవలెనంటే మిథ్యా సహసంబంధము అంటారు. అట్లాగే బరువుగా ఉన్న విద్యార్థులకు గణాంక శాస్త్రంలో ఎక్కువ మార్కులు వస్తున్నాయంటే వాటి సహసంబంధము అర్థరహితమే.

ఒక చలనంలోని మార్పుకు రెండో చలనంలోనిమార్పు స్థిర నిష్పత్తిలో లేనప్పుడు వక్రీయ సహసంబంధ మంటారు.కర్మాగారంలో పనిచేసేవారి సంఖ్య రెండింతలు చేసినప్పుడు వారు చేసే ఉత్పత్తి రెట్టింపు కాకపోవచ్చు. అట్లాంటప్పుడు అంటే మార్పులలో స్థిరనిష్పిత్తి ఏర్పడినప్పుడు వాటి మధ్య మహసంబందాన్ని వక్రిరేఖీయ సహసంబంధమ మంటారు.

పైన చెప్పిన రెండు రకాల సహసంబంధము ఒక్కొక్కప్పుడు సామాన్యమని, పాక్షికమని, బహుళమని కూడా చెబుతారు. సామాన్యసహ సంబంధంలో రెండు చలనాలనే అధ్యయనం చేస్తాము. అట్లాకాక రెండు కెంటె ఎక్కువ చలనాలను గురించి అధ్యయనం చేస్తే దానిని బహుళ సహసంబంధ మంటారు. ఉదాహరణకు రాబడి ఖర్చ రెండు చలనాలను తీసుకొంటే అది సామాన్యసహసంబంధము అవుతుంది. అట్లాకాక రాబడి, కర్చులు, ధరల పెరుగదల కూడా తీసుకొంటే అది బహుళ సహసంబంధము అవుతుంది. అట్లాఏ వయస్సు. బరువు, ఎత్తు తీసుకోవచ్చు. రాబడి, ఖర్చులు, ధరల పెరుగుదల మొదలైన చలనాల మూడింటిలో రెండు చలనాలను మాత్రమే గురించి (ఉదాహరణకు రాబడి, ఖర్చుల మధ్యగల సహసంబంధాన్నే) అధ్యయనం చేస్తే అది పాక్షిక సహసంబంధము అవుతుంది. అట్లాగే వయస్సు బరువు ఎత్తులలో వయస్సు బరువు తీసుకోవచ్చు. మనము ఈ అధ్యాయంలో సామాన్య సహసంబంధం గురించి మాత్రమే తెలుసుకొంటాము.

సహసంబంధము అధ్యయనం చేయడానికి కొన్ని పద్ధతులు ఈ దిగువ ఇచ్చినారు. వాటివల్ల రెండు చలనాల మధ్య సహసంబంధము 'ఉన్నదా' 'లేదా' అని తెలుసుకోవచ్చు.

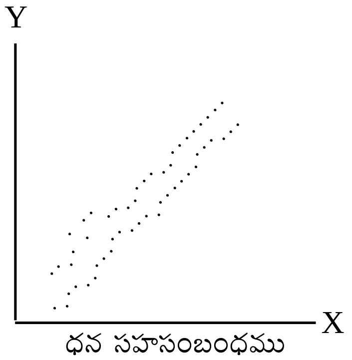
1. వ్యాపన పటము 2. సహసంబంధ గుణకము

1. వ్యాపనపటము : వ్యాపన పటంద్వారా సంబంధంగల రెండు చలనాలను గురించి అధ్యయనం చేయడం చాల సుళువైన ప్రక్రియ. ఈ పద్ధతిని ఉపయోగించేటప్పుడు ఇచ్చిన దత్తాంశాన్ని గ్రాఫ్ కాగితం పై బిందువులు ద్వారా గుర్తించవలే. రెండు చలనాలమధ్య సంబంధాన్ని తెలుసుకోవడం సహసంబంధ విశ్లేషణలో మొదటి మెట్టు. సహసంబంధ విశ్లేషణలో ప్రతి అంశము యొక్క పరిమాణానికి ఒక జత (జంట) సంఖ్యావిలువలు ఉంటాయి. అ జంట విలువలలో ఎకటి స్వతంత్ర చలనం అయితే రెండోది మొదటి దానిపై ఆధారరపడిన అస్వతంత్ర చలనము అవుతుంది. ఈ రెండు చలనాలను X, Y అనుకొంటే రేఖా చిత్రపటం గీయడానికి ఒక చలనాన్ని (స్వతంత్ర విచలనాన్ని X - అక్షం మీద, రెండో (స్వతంత్ర చలనాన్ని) Y- అక్షం మీదా తీసుకొని, ఒక జత విలువలకు ఒక బిందువు చొప్పున, అంటే X - మీద విలువకు అనురూపంగా Y - మీద విలు ఉండేటట్లు ఒక బిందువును గుర్తించవలె, అట్లా మొత్తం దత్తాంశాన్ని గుర్తిస్తే దత్తాంశంలో ఎన్ని జతల విలువలుంటే రేఖా చిత్రపటం మీద అన్ని బిందువులు మనకు వస్తాయి ఇప్పుడు ఆ బిందువుల వ్యాపనాన్ని బట్టి, రెండు చలనాలమధ్య సంబంధము ఉన్నదీ లేనిదీ ఒక నిర్ణయానికి రావచ్చు అంటే ఆ బిందువులు ఒక బిందుక్రమాన్ని ఊర్ధ్వదిశ లేదా ఆధోదిశగా చూపిస్తే ఆ రెండు చలనాలు సహసంబంధము కలిగి ఉన్నట్లు చెప్పవచ్చు మనము గుర్చించిన బిందువులు ఏవిధమైన బిందుక్రమాన్ని చుపనప్పుడు రెండు చలనాల మధ్య సహసంబంధం లేనట్లు చెప్పవచ్చు బిందువులు ఏ విధంగా అయితే వ్యాపనం చెందుతాయో దానినిబట్టి రెండు చలనాలమధ్య సంబంధము ఉన్నదీ లేనిదీ ఒక నిర్ణయానికి రావచ్చు. అంటే ఆ బిందువులు ఒక బిందుక్రమాన్ని ఊర్ధ్వదిశ లేదా ఆధోదిశగా చూపిస్తే ఆ రెండు చలనాలు సహసంబందము కలిగి ఉన్నట్లు చెప్పవచ్చు మనము గుర్తించిన బిందువుల ఏ విధమైన బిందుక్రమాన్ని చూపనప్పుడు రెండు చలనాల మధ్య సహసంబంధం లోనట్లు చెప్పవచ్చు బిందువులు ఏ విధంగా అయితే వ్యాపనం చెందుతాయో దానిని బట్టి రెండు చలనాల మధ్య సంబంధం యొక్క ఉనికిని చ్పెవచ్చు. అట్లా బిందువులతో ఏర్పడిన మార్గము ఇంచుమించుగా దిగువ ఎడమ మూలనుంచి ఎగువ కుడి మూలకు పోతే అట్లాంటి సంబంధాన్ని ధన సహసంబంధ మంటారు. ఇక్కడ తక్కువ విలువలు, రెండో చలనం తక్కువ విలువలతోను, ఎక్కువ విలువలు రెండో చలనం ఎక్కువ విలువలతోను పోయినప్పుడు ధన సహసంబంధము ఏర్పడుతుంది.

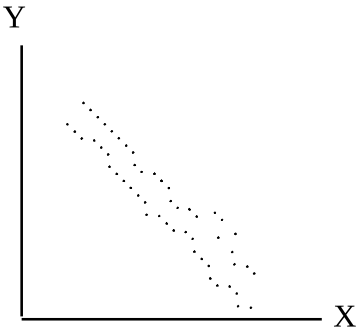
దిగువ చూపిన మొదటి పటంలో బిందుపథము ఎడమపక్క దిగువ మూల నుంచి క్రమేణ వృద్ధిచెందుతూ కుడివైపు ఎగువమూలకు చేరింది. దీనిని ధనసహసంబంధ మంటారు. అయితే సంపూర్ణ ధనసహసంబంధము ఉన్నప్పుడు, మనకు వచ్చే బిందుపథము సరళరేఖగా ఉంటుంది కాని ఆర్థిక దత్తాంశాలలో సంపూర్ణ సహసంబంధము సాధారణంగా ఉండదు.

అట్లాగే ఎక్కువ విలువలు రెండో చలనం తక్కువ విలువలతోను, తక్కువ విలువలు రెండే చలనం ఎక్కువ విలువతోను పోయినప్పుడు ఋణసహసంబంధము ఏర్పడుతుంది. పైన చూపిన రెండో పటంలో అది చూడవచ్చు. అక్కడ బిందుపథము ఎడమవైపు ఎగువ మూలనుంచి కూడివైపు దిగువమూలకు ఉంటే దీనిని ఋణసహసంబంధమంటారు. కాని సంపూర్ణ ఋణ సహసంబంధము ఉన్నప్పుడు మనకు ఎగువ ఎడమనుంచి కుడి దిగువ మూలకు ఒక సరళరేఖ ఏర్పడుతుంది అనికూడా ఇది వరకే తెలుసుకొన్నాము.

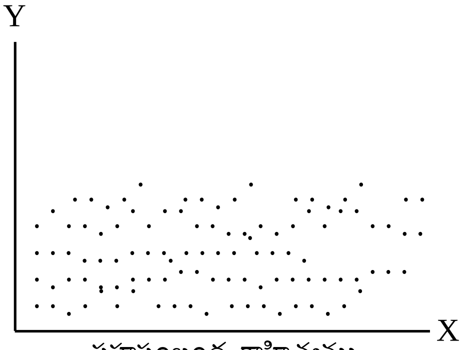
ఒక గుర్తించిన బిందువువల్ల ఒక పథము ఏర్పడకపోయినట్లయితే, అ రెండు చలనాల మధ్య సహచర్యము లేదని, అంటే స్వతంత్రంగా ఉన్న చలనానికి, అస్వతంత్రంగా ఉన్న చలనంపై ప్రభావం లేదని చెప్పవచ్చు. సంబంధ లేపాన్ని, అంటే ఒక చలనం, రెండో దాని విలువను నిరూపించడానికి సహయకారిగాలేనప్పుడు సహసంబంధ రాహిత్యము అంటారు. ఉదాహరణకు విద్యార్థులకు గణాంకశాస్త్రంలో వచ్చిన మార్కులకు, వారి బరువుకు సంబంధం లేదు. కాబట్టి వాటి సంబంధాన్ని వ్యాపనపటం ద్వారా చూపితే ఈ క్రింది విధంగా ఉంటుంది.



ధన సహసంబంధము

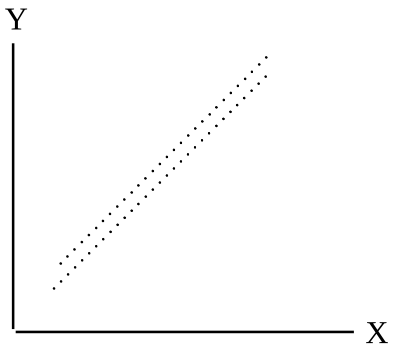


ఋణ సహసంబంధము

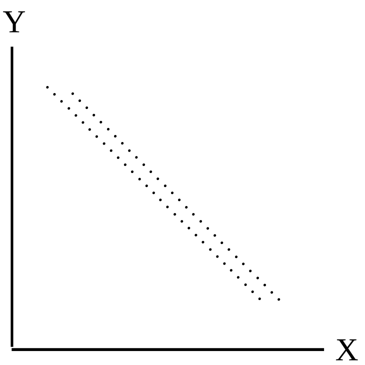


సహసంబంధ రాహిత్యము

పైన పటంలో బిందువులు చిందరవందరగా ఉండటంవల్ల వాటి పధాన్ని గుర్తించడం కష్టము. అందువల్ల ఇక్కడ రెండు చలనాల మధ్య సహసంబంధము లేదు అని చెప్పవచ్చు.



సంపూర్ణ ధన సహసంబంధము



సంపూర్ణ ఋణ సహసంబంధము

వ్యక్తిగత శ్రేణులు - సహసంబంధము: కార్ల్ పియర్సన్ సూత్రం ప్రకారం సహసంబంధ గుణకము కనుక్కోవడానికి, X - శ్రేణి అంకమధ్యమం నుంచి, అంశాలకు విచలనాలను తీసుకోవలె. తరవాతÇ Y- శ్రేణి అంకమధ్యమం నుంచి దాని అంశాలకు విచలనాలను తీసుకొని, రెండు శ్రేణుల విచలనాలను వ్యక్తిగతంగా వర్గం చేయవలె. అప్పుడు వర్గాలకు సంకలనం చేస్తే X - శ్రేణుల $\sum dx^2$ Y

- శ్రేణులకు $\sum dy^2$ వస్తుంది. X - శ్రేణిలోని విచలనాలచేత అనురూపంగా Y- శ్రేణిలో ఉన్న విచలనాలతో గుణించి లబ్ధాల సంకలనంచేస్తే $\sum dx\, dy$ వస్తుంది. ఇట్లా విలువలను తెలుసుకొన్న తరవాత సూత్రంలో ఉన్న సాంకేతికాలకు బదులు ఈ విలువలను ప్రతిక్షేపిస్తే కావలసిన విలువ (గుణకము) వస్తుంది.

2.3 సహసంబంధ గుణకము:

సహసంబంధ గుణకము శుద్ధసంఖ్య చలనాలవలె ఇది ఒక పరిమాణంలో చెప్పడం కుదరదు ఇది రెండు చలనాల మధ్యగల సంబంధ పరిమాణాన్ని కొలిచే శుద్ధ సంఖ్య అని మాత్రం గుర్తించవలె. రెండు చలనాల మధ్యగల సహసంబంధ పరిమాణాన్ని తెలుసుకొనే అనేక పద్ధతులలో కార్లె పియర్సన్ పద్ధతి ఒకటి రెండు శ్రేణుల యొక్క అంకమాధ్యమాలనుంచి క్రమంగా వాటి వివిధ &ంశాలకు విచలనాలను తీసి వాటి అనురూప లబ్ధాల సంకలనాన్ని, వాటి ప్రామాణిక విచలనాల లబ్ధాన్ని శ్రేణులలో గల జతల సంఖ్యతో గుణిస్తే వచ్చి మొత్తంతో (లబ్దము) భాగించినట్లయితే, రెండు చలనాల సహసంబంధ గుణకము వస్తుంది.

రెండు చలరాశుల మధ్య సహసంబంధం ఉన్నదీ ఆ సహసంబంధం ధనాత్మకమా లేదా రుణాత్మకమా మొదలైన ఎన్నో వివరాలను తెలుసుకోవటానికి, పరిమాణాన్ని తెలుసుకోవటానికి ప్రొఫెసర్ కార్ల్ పియర్సన్ అనే శాస్త్రవేత్త కింది సరళరేఖీయ సహసంబంధతా గుణకాన్ని ప్రతిపాదించారు.

(X, Y) చలరాశుల 'n' జతల విలువలు $(x_1, y_1), (x_2, y_2), ..., (x_n, y_n)$ అయినప్పుడు వాటిమధ్య ఉన్న కార్ల్ పియర్సన్ సరళరేఖీయ సహసంబంధతా గుణకం r_{xy} సూత్రం

$$r_{xy} = \frac{Cov(X,Y)}{\sigma_x . \sigma_y}$$

$$= \frac{N\sum f_{xy} - \left(\sum f_x x\right)\left(\sum f_y y\right)}{\sqrt{\left[N\sum f\, x^2 - (\sum f_x x)^2\right].\left[N\sum fy^2 - (\sum f_y y)^2\right]}}$$

r_{xy} **లక్షణాలు :**

(i) $r_{xy} = r_{yx}$

(ii) $-1 \le r_{xy} \le +1$

(iii) r_{xy} విలువ + 1.00 కు లేదా -1.00 కు ఎంత సమానమైతే అంత ఎక్కువ సహసంబంధత ఉందని అర్థం.

(iv) r_{xy} విలువ '0'కు ఎంత సమీపమైతే అంత తక్కువ సహసంబంధం ఉందని అర్థం.

(v) r_{xy} ధనాత్మకమైతే X, Y ల మధ్య ధనాత్మక సహసంబంధం ఉందని అర్థం.

(vi) r_{xy} రుణాత్మకమైతే ల X,Y మధ్య రుణాత్మక సహసంబంధం ఉందని అర్థం.

(vii) $r_{xy} = \pm 1.00$ అయితే X,Y ల మధ్య సంపూర్ణ ధనాత్మక లేదా సంపూర్ణ రుణాత్మక సహసంబంధం ఉందని అర్థం.

(viii) $r_{xy} = 0$ అయితే X,Y ల మధ్య సరళరేఖీయ సహసంబంధం లేదని అర్థం.

శ్రేణీద్వయానికి ప్రత్యక్ష పద్ధతిలో సహసంబంధ గుణకం : ఉదా॥ 10. 1 : మార్కెట్‌లోని ఒక వస్తువు సప్లై సరఫరా డిమాండు అవసరాల వివరాలు 25 రోజుల విచారణ ద్వారా కింది విధంగా తెలిశాయి. ఈ దత్తాంశం ఆధారంగా సరఫరా, అవసరాల మధ్య ఉన్న కార్ల్ పియర్సన్ సరళరేఖీయ సహసంబంధం ఎంత పరిమాణంలో, ఏ స్వభావంతో ఉందో కనుక్కోండి. ఆ సహసంబంధం సార్థకమైందో కాదో పరిశీలించండి. సరఫరా, అవసరాల అంచనా క్రమదోషాలను గణించండి.

విచారణ రోజు :	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
డిమాండు :	9	6	12	6	10	4	13	15	5	6
సప్లై :	11	13	7	10	5	15	10	15	6	3

11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
5	9	11	13	10	7	5	7	12	7	5	6	9	10	8
10	6	5	8	7	16	14	14	9	13	17	14	10	10	12

సూత్రాలు - పద్ధతి :

x = డిమాండు (అవసరం)

y = సప్లై (సరఫరా)

n = విచారణ రోజుల సంఖ్య లేదా (x,y) జతల సంఖ్యలుగా సంకేతిస్తాం.

$\sum x^2, \sum y^2, \sum xy$ విలువల గణను దత్తాంశంలోని (x, y) విలువలు చిన్నవిగానే ఉన్నాయి. కాబట్టి ప్రత్యక్ష పద్ధతిలోనే గణనను సులభంగానే చేయవచ్చు.

ప్రత్యక్ష పద్ధతిలో కార్ల్‌పియర్సన్ స.స.గు. గుణించడానికి కింది సూత్రాన్ని ఉపయోగిస్తాం.

$$r_{xy} = \frac{n\sum xy - \left(\sum x\right)\left(\sum y\right)}{\sqrt{\left[n\sum x^2 - \left(\sum x\right)^2\right]\left[n\sum y^2 - \left(\sum y\right)^2\right]}}$$

ఈ సూత్రం ప్రకారం, దత్తాంశం నుంచి $\sum x, \sum y, \sum xy, \sum x^2, \sum y^2$ విలువలను గణించి, వాటిద్వారా r_{xy} కనుక్కొంటాం.

r_{xy} ధనాత్మకమైతే, సరఫరా, అవసరాల మధ్య ధనాత్మక సహసంబంధం (సరఫరా పెరిగినప్పుడు అవసరం పెరగడం, లేదా సరఫరా తగ్గినప్పుడు అవసరం కూడా తగ్గడం సూచించే సహసంబంధం) ఉందని నిర్ణయిస్తాం. r_{xy} విలువ రుణాత్మకమైతే సరఫరా, అవసరాల మధ్య రుణాత్మక సహసంబంధం (సరఫరా పెరిగినప్పుడు అవసరం తగ్గడం లేదా సరఫరా తగ్గినప్పుడు అవసరం పెరగడాన్ని తెలియజేసే సహసంబంధం) ఉందని నిర్ణయిస్తాం.

x	y	xy	x^2	y^2
9	11	99	81	121
6	13	78	36	169
12	7	84	144	49
6	10	60	36	100
10	5	50	100	75
4	15	60	16	225
13	10	130	169	100
15	15	225	225	225
5	6	30	25	36
6	3	18	36	9
5	10	50	25	100
9	6	54	81	36
11	5	55	121	25
13	8	104	169	64
10	7	70	100	49
7	16	112	49	256
5	14	70	25	196
7	14	98	49	196
12	9	108	144	81
7	13	91	49	169
5	17	85	25	289
6	14	84	36	196
9	10	90	81	100
10	10	100	100	100
8	12	96	64	144
210	**360**	**2101**	**1986**	**3060**

$$r_{xy} = \frac{(25)(2101)-(210)(260)}{\sqrt{\left[(25)(1986)-(210)^2\right]\left[(25)(3060)-(260)^2\right]}}$$

$$= \frac{52525-54600}{\sqrt{[49650-44100]\,[76500-67600]}}$$

$$= \frac{-2075}{\sqrt{(5550)(8900)}} = -0.2952$$

r_{xy} రుణాత్మకం కాబట్టి, సరఫరా, అవసరాల మధ్య రుణాత్మక సహసంబంధం ఉందని నిర్ణయిస్తాం. అంటే, ఒక చలరాశి పెరిగితే (తగ్గితే) ఇంకో చలరాశి తగ్గుతోందని (పెరుగుతోందని) భావం.

ఉదా : 10. 2. కింది దత్తాంశం నుంచి, విద్యుత్ తీగ చుట్టల పొడవు, బరువుల మధ్య కల సహసంబంధ పరిమాణాన్ని గణించండి.

తీగచుట్ట :	1	2	3	4	5	6	7	8
తీగపొడవు : (యూనిట్లలో)	70	90	100	120	130	150	160	200
తీగబరువు : (యూనిట్లలో)	30	40	40	50	50	50	60	70

	9	10	11	12
	190	200	220	230
	70	80	80	80

ఫలితాలు : x = బరువు, y = పొడవు, $\sum xy = 118600$

$$\sum x = 700,\ \sum y = 1860,\ \sum x^2 = 44200,\ \sum y^2 = 319800$$

$$r = \frac{121200}{\sqrt{(40400)(378000)}} = 0.9808$$

ఉదా : 2. 3 సహసంబంధ గుణకము ఈ క్రింది దత్తాంశానికి గణన చేయండి.

క్ర. సంఖ్య		**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
A **లో వచ్చిన మార్కులు**	:	20	35	42	37	13	39	24
B **లో వచ్చిన మార్కులు**	:	32	37	50	30	25	24	40

క్ర. సంఖ్య	X	Y	x= X-37	y = Y-30	xy	x^2	y^2
1	20	32	-17	2	-34	289	4
2	35	37	-2	7	-14	4	49
3	42	50	+5	20	100	25	400
4	37	30	0	0	0	0	0
5	13	25	-24	-5	120	576	25
6	39	24	2	-6	-12	4	36
7	24	40	-13	10	-130	169	100
					30	1067	614

$$=\frac{\sum xy}{N\sqrt{\sum x^2}\sqrt{\sum y^2}} = \frac{30}{7\times\sqrt{1067}\sqrt{614}} = \frac{30}{7\times 32.665\times 24.779} = 0.005294$$

2.4 కోటి సహసంబంధము:

రెండు గుణాత్మక లక్షణాలను మధ్య సంబంధాన్ని సూచించే దానిని కోటి సహసంబంధం అంటారు.

వ్యాపార, పారిశ్రామిక రంగాలలో కొన్ని సందర్భాలలో, పరిశీలించదలచిన చలరాశిని పరిమాణాత్మకంగా కొలవడానికి వీలుగాక పోవచ్చు. అప్పుడు చలరాశికి ఖచ్చితమైన సంఖ్యాత్మక విలువ నివ్వడానికి వీలుకాదు. ఉదాహరణకు 4 రకాల సిగరెట్ల రుచిని సంఖ్యాత్మకంగా కొలవలేం. కానీ వాటి రుచిని బట్టి కోటీలు (Ranks) ఇవ్వవచ్చు. అంటే "చాలా బాగుంది, బాగుంది, ఫరవాలేదు, బాగాలేదు" అని 4 రకాలుగా చెప్పవచ్చు.

ఇదేవిధంగా ఒక అధికారి తన కింది ఉద్యోగుల పనితనాన్ని బట్టి కోటిలు ఇవ్వగలడు. కానీ వారి పనితనాన్ని సంఖ్యారూపంలో చెప్పలేడు. నిజాయితీ, అందం, నడవడి, అభిరుచి, సంగీత ప్రావీణ్యత మొదలైన గుణాత్మక లక్షణాలను కూడా పరిమాణాత్మకంగా కొలవలేం. కానీ ఈ లక్షణాలు ఉన్న అంశాలను వాటి ప్రాముఖ్యతను బట్టి వరుసక్రమంలో అమర్చవచ్చు.

ఈ పరిస్థితులలో కార్ల్‌పియర్సన్ సహసంబంధ గుణకాన్ని గణించలేం. ఇటువంటి సందర్భాలకు స్పియర్మన్ అనే బ్రిటిష్ మనస్తత్వ శాస్త్రవేత్త 1904లో ఒక సూత్రాన్ని రూపొందించాడు. ఇందులో చలరాశుల విలువలకు గాక, వాటి కోటిలకు సహసంబంధ గుణకాన్ని గణిస్తారు.

$$\rho = 1-\frac{6\sum d^2}{n\left(n^2-1\right)} = d = R_x - R_y$$

సహబద్ధకోటిలు (Tied Ranks) లేదా పునరావృత్త కోటిలు (Repeated Ranks): గుణ సాంఖ్యక వర్గీకరణలో ఒక గుణానికి చెందిన ఇద్దరు లేదా అంతకంటె ఎక్కువ మంది ఒకే ప్రతిభ కలిగి ఉండవచ్చు. అంటే ఒకే రకమైన పనితనాన్ని ఇద్దరు లేదా అంతకంటే ఎక్కువ మంది చూపవచ్చు. అప్పుడు వ్యక్తుల ప్రతిభ (కోటి) లో సహబద్ధత (పునరావృత్తి) ఏర్పడుతుంది. ఇదే పరిస్థితి పరిమాణాత్మక దత్తాంశంలో కూడా ఏర్పడవచ్చు. అంటే రెండు లేదా అంతకంటే ఎక్కువ అంశాలు ఒకే విలువను కలిగి ఉన్న సందర్భాలలో సహబద్ధ కోటిల సమస్య వస్తుంది. ఈ సహబద్ధత లేదా పునరావృత్తి పరిశీలనలో ఉన్న రెండు గుణాలలోనూ ఉండవచ్చు.

రెండు గుణాలలో లేదా చలరాశులలో కోటిల పునరావృత్తి ఒకే సంఖ్యలో ఉండకపోవచ్చు. అప్పుడు స్పియర్మన్ కోటి సహసంబంధ గుణక సూత్రం నిష్ప్రయోజనమవుతుంది. ఎందుకంటే రెండు గుణాల (చలరాశుల) కోటీలు 1 నుండి n వరకు ఉండవు. తత్ఫలితంగా వాటి అంకమధ్యమాలు సమానంగా ఉండవు. అదేవిధంగా విస్తృతులు సమానంగా ఉండవు. స్పియర్మన్ సహసంబంధ గుణకాన్ని వ్యుత్పన్నం చేయడంలో $\overline{X} = \overline{Y}$ అనీ $\sigma_{X^2} = \sigma_{Y^2}$

అనీ ఉపకల్పనలు చేశాం. అందుకు $1 - \dfrac{6\sum_i d_i^2}{n(n^2-1)}$ సూత్రాన్ని యథాతథంగా వాడకూడదు. దీనిని కొంత సర్దుబాటుతో ఉపయోగించాలి.

ఈ సర్దుబాటు కిందివిధంగా చేస్తాం. ఒకే ప్రతిభ ఉన్న అంశాలకు వరుసగా పక్క పక్కనున్న కోటీలను ఇచ్చి, ఆ కోటిల సగటును వాస్తవానికి ఆయా అంశాల ఎదుట నమోదు చేస్తారు. ప్రతిభలో తరువాత అంశానికి వరుస క్రమంలోని తరువాత కోటిని కేటాయిస్తారు. ఉదాహరణకు 3వ కోటి ఉన్న అంశం రెండు సార్లు పునరావృతమై మొదట వచ్చిన అంశానికి 3వ కోటి, తరువాత అంశానికి 4వ కోటి కేటాయిస్తారు. రెండు కోటిల సగటు $\dfrac{3+4}{3} = 3.5$ ను రెండు అంశాలకు ఉమ్మడి కోటి (Common rank) గా నమోదు చేస్తారు. 7వ కోటి మూడుసార్లు పునరావృతమై ఉంటే వరుసగా 7,8,9 కోటిల సగటు $\left(\dfrac{7+8+9}{3} = 8\right)$ ను మూడు అంశాలను ఇస్తారు. తరువాత అంశానికి 10వ కోటిని కేటాయిస్తారు. దీనివల్ల అంశాల సంఖ్యకు వ్యత్యాసముండదు. కాబట్టి స్పియర్మన్ సూత్రాన్ని ఉపయోగించి కోటిసహసంబంధ గుణకాన్ని కనుక్కొంటారు.

పునరావృత్తుల సంఖ్య తక్కువగా ఉంటే పైన తెలిపినట్లు ఉమ్మడి కోటీలను కేటాయించి మామూలు పద్ధతిలోనే కోటి సహసంబంధ గుణకాన్ని గుణించవచ్చు. కానీ సహబద్ధ (పునరావృత్త) కోటిల సంఖ్య ఎక్కువగా ఉన్నప్పుడు స్పియర్మన్ సూత్రంలోని $\sum_i d_i^2$ కు $\dfrac{k(k^2-1)}{12}$ విలువనుకలపాలి. ఇక్కడ, k ఒక అంశం ఎన్నిసార్లు పునరావృత్తమైందో ఆ సంఖ్య ప్రతి సహబద్ధ అంశానికి ఈ సవరణాంకాన్ని జోడించాలి.

అప్పుడు $\rho = 1 - \dfrac{6\left[\sum_i d_i^2 + \dfrac{k(k^2-1)}{12}\right]}{n(n^2-1)}$ అవుతుంది.

ఉదా : 10. 4 : క్రింది దత్తాంశానికి కోటి సహసంబంధ గుణకాన్ని కనుక్కోండి.

X:	58	64	65	55	44	80	65	75	40	55	64	55
Y:	52	48	45	62	45	68	62	82	44	45	74	62

సాధన : X, Y ల కోటిలను X, Y తో గుర్తిద్దాం.

X	Y	Rx	Ry	d = Rx - Ry	d^2
58	52	7	7	0	0
64	48	5 5.55	8	-2.5	6.25
65	45	4 3.5	9 10	-6.5	42.25
55	62	8 9	4 5	4	16.0
44	45	11	10 10	1	1.00
80	68	1	3	-2	4.00
65	62	3 3.5	5 5	-1.5	2.25
75	82	2	1	1	1.00
40	44	12	12	0	0
55	45	9 9	10 10	-1	1.00
64	74	6 5.5	2	3.5	12.25
55	62	10 9	6 5	4	16.00
			మొత్తం	0	102.00

ఇక్కడ n = 12

X చలరాశిలో 65 విలువ 2 సార్లు 64 విలువ 2 సార్లు 55 విలువ 3 సార్లు పునరావృతం అయ్యాయి.

$\therefore \sum_i d_i^2$ కు $\dfrac{k(k^2-1)}{12}$ ను 3 సార్లు జోడించాలి.

అంటే $k_1 = 2, k_2 = 2, k_3 = 3$, X చలరాశికి సవరణాంకం $= \dfrac{2(2^2-1)}{12} + \dfrac{2(2^2-1)}{12} + \dfrac{3(3^2-1)}{12}$

$$= \frac{6}{12} + \frac{6}{12} + \frac{24}{12} = 3.$$

ఇదేవిధంగా Y చలరాశిలో 45 విలువ 3 సార్లు, 62 విలువ 3 సార్లు పునరావృతం అయ్యాయి. కాబట్టి Y చలరాశికి రెండుసార్లు సవరణాంకాన్ని జతపరచాలి.

i.e., $k_1 = 3, k_2 = 3$.

సవరణాంకం $\frac{3(3^2-1)}{12}+\frac{3(3^2-1)}{12}=2+2=4$

ఇప్పుడు కోటి సహసంబంధం గుణం

$$\rho = 1-\frac{6\left[\sum_j d_i^2+3+4\right]}{n(n^2-1)}$$

$$=\frac{6[102+3+4]}{12(12-1)}=1-\frac{6\times109}{12\times143}=1-0.3811$$

$$=0.6189\cong0.62$$

$\therefore$ చలరాశులలో సహబద్ధకోటిలు ఉన్నప్పుడు కోటి సహసంబంధ గుణకం = 0.62.

ఉదా ॥ 2. 5 : ఒక కార్యాలయంలో సహాయకుడి ఖాళీని నింపడానికి నిర్వహించిన పరీక్షకు 11 మంది అభ్యర్థులు హాజరయ్యారు. వారికి ఇంగ్లీషు, అంకగణితంలో జరిపిన పరీక్షలో లభించిన మార్కులు కింది విధంగా ఉన్నాయి. ఈ వివరాలకు కోటి సహసంబంధ గుణకాన్ని కనుక్కోండి.

అభ్యర్థి సంఖ్య	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
ఇంగ్లీషు		25	36	20	36	48	52	25	65	35	45
60											
అంకగణితం	35	42	30	42	56	68	45	50	42	55	68

సాధన : ఇంగ్లీషు, అంకగణితం మార్కుల కోటిలను వరుసగా తో సూచిద్దాం.

. సాంఖ్య			1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11												
X		9.5	6.5	.	6.5			9.5				
మొత్తము		9	6	11	7	4	3	10	1	8	5	2
		8		8		1.5			8		1.5	1
Y	10	7	11	8	3	2	6	5	9	4		
d=	-0.5	-1.5	0	-1.5	1	1.5	3.5	-4	0	1	0.5	0
X-Y												
d^2	0.25	2.25	0	2.25	1	2.25	12.25	16	0	1	0.25	37.5

ఇక్కడ n = 1

కోటి సహసంబంధ గుణకం $\rho = 1 - \frac{6\sum d_i^2}{n(n^2-1)} = 1 - \frac{6 \times 37.5}{11 \times 20} = 1 - \frac{225}{1320} = 0.8295$

2.5 సూక్ష్మ, పాక్షిక సహసంబంధ గుణకములు :

త్రిచలరాశి ప్రతిగమన నమూనాలోని మూడు చలరాశుల మధ్య మూడు సూక్ష్మసహసంబంధ గుణకాలను కనుగొనగలము. అవి : R^2 అనగా Y, X_2 ల మధ్య సహసంబంధ గుణకం. r_{13} అనగా Y, X_3 ల మధ్య సహసంబంధ గుణకం. r_{23} అనగా X_2, X_3 ల మధ్య సహసంబంధ గుణకం. వీటిని స్థూల లేదా శూన్య ఆర్డరు సహసంబంధ గుణకాలంటాము. ఈ గుణకాలకు ఒక పరిమితి ఉంది. X_3 రాశి X_2, Y రాశుల రెండింటితోను సంబంధం కలిగి ఉందనుకుందాము. ఇప్పుడు r_{12} విలువ Y, X_2 ల మధ్యగల సహసంబంధాల యొక్క దృఢత్వాన్ని తెలుపదు. అందుచేత Y, X_2 లపై X_3 ప్రభావం లేకుండా ఉండే సహసంబంధ గుణకాన్ని కనుగొనాలి. పాక్షిక సహసంబంధ గుణకం దానికి ఉపయోగపడుతుంది. భావనాపరంగా ఇది పాక్షిక ప్రతిగమన గుణకం మాదిరిగానే ఉంటుంది. వీటిని క్రిందివిధంగా నిర్వచిస్తాము.

$r_{12.3} = X_3$ ని స్థిరంగా ఉంచినప్పుడు Y, X_2 ల మధ్య పాక్షిక సహసంబంధ గుణకం.

$r_{13.2} = X_2$ ని స్థిరంగా ఉంచినప్పుడు Y, X_3 ల మధ్య పాక్షిక సహసంబంధ గుణకం.

$Y_{23.1} = Y$ ని స్థిరంగా ఉంచినప్పుడు X_2, X_3 ల మధ్య పాక్షిక సహసంబంధ గుణకం.

వీటిని సూక్ష్మ లేదా శూన్య ఆర్డరు సహసంబంధ గుణకాల నుండి పొందగలము.

$$r_{12.3} = \frac{r_{12} - r_{13}r_{23}}{\sqrt{(1-r_{13}^2)(1-r_{23}^2)}}$$

$$r_{13.2} = \frac{r_{13} - r_{12}r_{23}}{\sqrt{(1-r_{12}^2)(1-r_{23}^2)}}, \quad r_{23.1} = \frac{r_{23} - r_{12}r_{13}}{\sqrt{(1-r_{12}^2)(1-r_{13}^2)}}$$

పై పాక్షిక సహసంబంధ గుణకాలను మొదటి ఆర్డరు గుణకాలంటాము. అనగా రెండవ పాదుకలో ఒక సంఖ్య మాత్రమే ఉంది. ఎందుకంటే ఒక చలరాశి ప్రభావాన్ని మాత్రమే తొలగించి సహసంబంధ గుణకాన్ని కనుగొంటాము. ఇదేవిధంగా రెండవ ఆర్డరు పాక్షిక సహసంబంధ గుణకాలను నిర్వచించగలము. $r_{12.34}$ ని Y, X_2 లపై X_3, X_4 ల ప్రభావాన్ని తొలగించిన తర్వాత కనుగొన్న సహసంబంధ గుణకంగా తెలుసుకోవాలి. పాక్షిక సహసంబంధ గుణకాన్ని పరిశీలించి కొన్ని ముఖ్య విషయాలను తెలుసుకోగలము.

1. r_{12} శూన్యమైనా $r_{12.3}$ శూన్యం కానవసరం లేదు.

2. $r_{12.3}^2$ విలువ r_{12}^2 విలువ వలెనే (0,1) అంతరంలో ఉంటుంది. దీనినిబట్టి సూక్ష్మసహసంబంధ గుణకాల

మధ్య క్రింది సంబంధాన్ని పొందుతాము.

$$0 \le r_{23}^2 \le 1$$

$$0 \le r_{12}^2 + r_{13}^2 \;\; r_{23}^2 - 2r_{12} \;\; r_{13} \;\; r_{23} \le \left(1 - r_{13}^2\right)\left(1 - r_{23}^2\right)$$

$$0 \le r_{12}^2 + \; r_{13}^2 \;\; r_{23}^2 - 2r_{12} \;\; r_{13} \;\; r_{23} \le 1$$

ఈ సంబంధం వల్ల r_{12}, r_{13}, r_{23} విలువలు సాధ్యమోకాదో చెప్పగలం.

ఉదాహరణకు $r_{12} = 0.8;\; r_{23} = 0.9;\; r_{13} = -0.2$ సాధ్యమా?

$$r_{12}^2 + r_{13}^2 + r_{23}^2 - 2r_{12} \;\; r_{13} \;\; r_{23} = 0.64 + 0.81 + 0.04 - 2 \times 0.8 \times 0.9 \times (-0.2)$$

$$= 1.49 + 0.288 = 1.778 > 1$$

పైన ఇవ్వబడిన విలువలు సాధ్యం కాదు. అలాగే ఇంకొక ఉదాహరణ చెప్పాలంటే

$$r_{12} = 0.01; r_{13} = 0.66; r_{23} = -0.7$$

$$r_{12}^2 + r_{13}^2 + r_{23}^2 - 2r_{12}r_{13}r_{23}$$

$$= 0.0001 + 0.4356 + 0.49 - 2 \times 0.01 \times 0.66(-0.7)$$

$$= 0.93494 < 1$$

కావున ఈ విలువలు సాధ్యము.

2.6 సారాంశము :

ఈ పాఠంలో సహసంబంధము లేదా ద్విచలరాశుల మధ్య గల సంబంధముల గురించి తెలుసుకొన్నాము. ఇచ్చిన రెండు చలరాశుల మధ్య గల సంబంధము ఎంతవరకు ఉన్నది తెలియచేసే సహసంబంధగుణకము గణన చేయు విధానము తెలుసుకొన్నారు. కార్ల్ పియర్సన్ సహసంబంధ గుణకము వాటి అవధులు, దిశలను కూడా నిర్ణయించు విలువలను గురించి తెలుసుకొన్నారు. స్పియర్‌మెన్ కోటి సహసంబంధ గుణకము రెండు రాశుల కోటీల మధ్య గల సంబంధాన్ని తెలియజేయును. అంతేకాకుండా ఈ పాఠ్యాంశములో రెండు అంతకంటే ఎక్కువగల చలరాశుల మధ్య గల సంబంధాలను తెలుసుకొనటానికి బహుసహసంబంధ గుణకము, సూక్ష్మ సహసంబంధ గుణకము మరియు పాక్షిక సహసంబంధగుణకములను గణించుట కూడా తెలుసుకొన్నాము.

2.7 గుర్తుంచుకోవలసిన విషయాలు :

కార్లపియర్సన్ సహసంబంధ గుణకము ఎప్పుడు -1 నుండి 1 మధ్యలోనే ఉండవలెను. r_{xy} విలువ +1.00కు లేదా -1.00కు ఎంత సమానమైతే అంత ఎక్కువ సహసంబంధత ఉందని అర్థం.

స్పియర్‌మెన్ కోటి సహసంబంధ గుణకము ρ విలువ 1.00కి ఎంత దగ్గరగా వుంటే x, yల మధ్య అంత

ఎక్కువ సహసంబంధం ఉందని అర్థం. ρ విలువ '0'కు ఎంత సమీపంగా ఉంటే x, yల మధ్య అంత తక్కువ సహసంబంధం ఉందని భావిస్తాం.

2.8 స్వయం సమాధాన ప్రశ్నలు

1. 15 మంది విద్యార్థుల ఎత్తు బరువుల వివరాలు కింద యిచ్చాం. ఈ వివరాల ఆధారంగా ఎత్తు బరువుల మధ్య సహసంబంధతా పరిమాణాన్ని గణించండి.

ఎత్తు (సెం.మీ.)	155	159	162	169	142	160	148	167	153	163	150	166	154	145	151
బరువు (కిలోలు)	59	60	67	73	51	68	59	78	60	64	52	69	60	56	64

2. సహసంబంధ గుణకము ఈ క్రింది దత్తాంశానికి గణన చేయండి

ఆకు బరువు (గ్రాములలో)	4.1	4.9	3.7	3	4.5	4.2	4.3	4.8	3.9	3.7	4.1	5	4.8	4.9	5.1
ఆకు వైశాల్యం(చ.మి.మి)	50.9	49.1	47.2	46.1	51.2	51.2	51.9	52	46.2	45.6	50	55.2	49.8	49.9	51.2

3. క్రింది దత్తాంశానికి కోటి సహసంబంధ గుణకాన్ని కనుక్కోండి.

x :	73	91	50	62	77	82	99	100	38	44	76	92	68	56	49	37	57	58
	83	79	66	40	33	75	41	96										
y :	61	83	71	78	90	100	66	81	57	60	70	92	77	62	58	63	47	64
	79	88	65	50	48	87	51	89										

4. కోటి సహసంబంధ గుణకము ఈ క్రింది దత్తాంశానికి గణన చేయండి.

A :	61	50	32	77	92	61	33	81	50	95	80	100	56	44	49	82	50	79
	53	80	88	50	96	80	47											
B :	39	72	61	81	83	63	42	38	77	61	54	63	55	72	40	38	70	60
	56	84	100	95	63	57	60											

2.9 సంప్రదించుకోవలసిన పుస్తకాలు :

1. Fundamentals of Mathematical Statistics; S.C. Gupta & V.K. Kapoor, Publisher : S. Chand & Co.

2. Basic Statistics by B.L. Agarwal, Third Edition, New Age International (p) Limited.

పాఠం : 3

ప్రతిగమనం
(Regression)

విషయక్రమం :

ఈ పాఠ్యాంశంలో మనం
- కనిష్ట వర్గాల పద్ధతి ద్వారా సమీకరణాలను సాధించుట
- ప్రతిగమనము, సాంఖ్యాక శాస్త్రంలో దాని ప్రాధాన్యత
- ప్రతిగమనము, సహసంబంధముల మధ్య గల సంబంధము
- బహుళ ప్రతిగమనము
- బహుళ నిర్ధారక గుణకము
- సూక్ష్మ, పాక్షిక సహసంబంధ గుణకములు, బహుళ నిర్ధారక గుణకముల మధ్య గల సంబంధము
- పాక్షిక ప్రతిగమనము
- వివిధ పద్ధతుల ద్వారా పై వాటిని గణించుట గురించి తెలుసుకొనగలము.

3.1 ఉపోద్ఘాతం :

పరిశీలనలోని ఏవైనా రెండు చలరాశుల మధ్య ఉన్న సాధారణ సంబంధాన్ని సహసంబంధం అంటారు. అంటే ఒక చలరాశిలో ని మార్పు వేరొక చలరాశిలోని మార్పుపై ఆధారపడి ఉంటూ ఆ రెండు చలరాశుల మధ్య సహసంబంధత ఉందంటారు. ఉదాహరణకు ఎత్తు, బరువు రెండూ పరస్పర ఆధార చలరాశులు. ఎత్తు అధికం అయితే బరువు కూడా అధికం అవుతుంది. వర్షపాతము, పంట దిగుబడి రెంగూ పరస్పరాధార చలరాశులు. ఇదేవిధంగా ఆదాయం, ఖర్చు (వ్యయం) సరఫరా, గిరాకీ, కార్మికుని శ్రమ, ఉత్పాదకం మొదలైనవి పరస్పర ఆధార చలరాశులు. ఈ పరస్పర ఆధార చలరాశులు కలిసి కొంత అనుపాతంలో మార్పు చెందితే వాటి మధ్య ఉన్న సహసం బంధాన్ని సరళరేఖీయ సంబంధం (linear correlation) అని అంటారు.

3.2 కనిష్ట వర్గాల పద్ధతి :

ఒక విషయానికి సంబందించి రెండు లక్షణాల దృష్ట్యా (xi, yi), i = 1,2, ... n అనే 'n' విలువల జంటల దత్తాంశాన్ని తీసుకుందాము. ఇక్కడ x ను స్వతంత్ర చలరాశి (Independent Variable) గానూ, y ను ఆధార చలరాశి (Dependent Variable) గానూ అనుకుందాము. అప్పుడు X, Y ల మధ్య సంబంధీతా ప్రమేయాన్ని (Functional Relationship) ఒక ప్రమేయం రూపం లో కనుక్కోవడంవక్ర సంధానంలో సమస్య. సిద్ధాంత రీత్యా X, Y ల మధ్య సహ సంబంధం (Correlation) ప్రతిగమనం (Regression) లను గురించి చదివేటప్పుడు వక్రసంధాన పద్ధతుల ఆవశ్యకత ఎంతైనా ఉంది. అంతే కాక కొన్ని స్వతంత్ర చలరాశి విలువలకు సరిపడు ఆధార చలరాశి విలువలనను అంచనా వేయడానికి కూడా పద్ధతి ఉపయోగపడుతుంది.

x,y లకు సంబంధించి (xi, yi), i = 1,2, ... n అనే n జంట విలువలున్నాయనుకొందాం. x,y ల మధ్య ప్రమేయ సంబంధం p ఘాతం గల బహుపది (polynomial) అనుకుందాం.

అంటే $$y = f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_px^p \quad ...(11.1)$$

ఘాతము స్థాయి నిర్ధారించిన తరువాత ఇచ్చిన n జంట విలువలకు $a_0, a_1, a_2, a_2, ...a_p$ అను తెలియని స్థిర సంఖ్యలను నిర్ధారించడం ద్వారా దత్తాంశానికి ' వీలైనంత చక్కని సంధానం ' (best possible fit) చేయడం ముఖ్య సమస్య అవుతుంది.

అన్ని పద్ధతులలోను మిక్కిలి ప్రాముఖ్యం సంతరించుకొని, తరచు వాడుకలో ఉన్న సాంఖ్యాత్మక పద్ధతే కనిష్ఠ వర్గాల పద్ధతి (Method of least squares).

దత్తాంశంలో ఇచ్చిన x విలువలను ప్రతిక్షేపిస్తే వచ్చే f(x) విలువలను y ఆశంశిత (expected value) లు అంటారు. అప్పుడు $\left[y - f(x)\right]$ ను అవశిష్ఠం(residue) అంటారు. ఈ అవశిష్ఠాలను వర్గాల అంచనా మొత్తం (E తో సంకేతిస్తే)

$$E = \sum_{i=1}^{n}\left[y_i - f(x_i) \right]^2$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\left[y_i - \left(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_p x^p\right)\right]^2 \qquad ...(11.2)$$

అవుతుంది.

E విలువ 'సున్న' అయితే ప్రతి అవశిష్ఠం విలువ సున్నకు సమానమౌతుంది. అప్పుడు ఈ దత్తాంశం ఖచ్చితంగా ఈ సమీకరణానికి ప్రాతినిధ్యం వహిస్తుంది. ఈ సందర్భంతో తప్ప ఇతరత్రా E విలువ ధనాత్మకం అవుతుంది.(11.2) నుంచి విలువలు దూరమైన కొద్ది E విలువ ఎక్కువవుతోంది.ఈ దృష్ట్యా E విలువ కనిష్ఠమైనప్పుడు దత్తాంశానికి ఈ (11.1) ప్రమేయ సంబంధం ఉత్తమైన లేదా చక్కని సంధానం (best fit) అవుతుంది. దత్తాంశ విలువల అవశిష్ట వర్గాల మొత్తం కనిష్ఠ వర్గాల పద్ధతి (Method of least squares) అంటారు.

(11.2)లోని $a_0, a_1, a_2, ...a_p$ లకు ఏ విలువలు ఇస్తే E కనిష్ఠ మౌతుందో ఆ విలువలు $a_0, a_1, a_2, ...a_p$ అంచనా లువలు అవుతాయి. వాటిని వరసగా $\hat{a}_0, \hat{a}_1, \hat{a}_2, ...\hat{a}_p$ లతో సంకేతిద్దాం.వీటిని సాధించటానికి E ని $a_0, a_1, a_2, ...a_p$ అనే(p+1) చలరాశుల ప్రమేయంగా పరిగణించి వీటి దృష్ట్యా పాక్షికవ్యుత్పన్న గుణకాల (Partial differentiational coefficients) ను కనుగొని సున్నకు సమానం చేసి సూక్ష్మీకరిస్తే (p+1) సమీకరణాలు వస్తాయి. అవి

$$\frac{\partial E}{\partial a_j} aj = \hat{a}_{-j} = o; j = 0,1,2,...., p.$$

ఈ (p+1) సమీకరణాలను (x_i, y_i)లో సాధిస్తే $a_0, a_1, a_2, ...a_p$ల అంచనాలను, అంటే $\hat{a}_0, \hat{a}_1, \hat{a}_2, ...\hat{a}_p$ లను రాబట్టవచ్చు. అప్పుడు x,y లకు సంబంధించిన n జంట విలువల దత్తాంశానికి కనిష్ట వర్గాల పద్ధతినుపయోగించి సంధానించిన వక్రరేఖ.

$$y = f(x) = \hat{a}_0 + \hat{a}_1 x + \hat{a}_2 x^2 + \hat{a}_3 x^3 + ... + \hat{a}_p x^p \quad ... (11.3)$$ అవుతుంది.

ఇచ్చిన దత్తాంశంలోని $x_{1,} x_{2,.....} x_n$ విలువలనుపై సమీకరణములో ప్రతిక్షేపించి సూక్ష్మీకరిస్తే అంచనా విలువలు (estimated values) $y_0, y_1, y_{2,.....} y_n$ లు వస్తాయి.

ఉదాహరణ 11.1 : కింది దత్తాంశానికి సరళరేఖను సంధానించండి.

x	1	3	4	6	8	9	11	14
y	1	2	4	4	5	7	8	9

సాధన : దత్తాంశానికి సంధానించిన సరళరేఖ y=ax+b అనుకుందాం. కనిష్ఠ వర్గాల సూత్రం ఉపయోగించి దత్తాంశానికి కింద సామాన్య సమీకరణాలను సాధిస్తే a,b ల అంచనాలు వస్తాయి. అవి :

$$\sum_{i=1}^{n} y_i = a\sum_{i=1}^{n} x_i + nb$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i = a\sum_{i=1}^{n} x_i^{\ 2} + b\sum_{i=1}^{n} x_i ; n = 8$$

ఇప్పుడు $\sum_{i=1}^{n} x_i, \sum_{i=1}^{n} y_i, ...$ వగైరాల గణనకు కింది పట్టిక ఉపయోగిస్తే సులువుగా ఉంటుంది.

	xi	**yi**	**xi2**	**xiyi**
	1	1	1	1
	3	2	9	6
	4	4	16	16
	6	4	36	24
	6	4	36	24
	8	5	64	40
	9	7	81	63
	11	8	121	88
	14	9	196	126
మొత్తం	56	40	524	364

పై సామాన్య సమీకరణాలలో గణించిన విలువలనను ప్రతిక్షేపిస్తే

$$40 = 56a + 8b$$

$$364 = 524\,a + 56\,b.$$

వీటిని సాధిస్తే a=0.6364 b= 0.5452 అని వస్తాయి. కనిష్ఠ వర్గాల పద్ధతినుపయోగించి ఇచ్చిన దత్తాంశానికి సంధానించిన సరళరేఖ.y=.6364x + 0.5452 అవుతుంది.

3.3 ప్రతిగమనం :

ఉదా॥ 11.2 : క్రింది దత్తాంశం 12 మంది వయస్సు వారి రక్తపోటు తెలుపుతుంది. దీని నుంచి ని మీద y ప్రతిగమన రేఖ ని మీద y ప్రతిగమన రేఖను కనుక్కోండి. వయస్సు 65 సంవత్సరాలు అయినప్పుడు రక్తపోటును అంచనా వేయండి.

వయస్సు x సంవత్సరాలలో	56	42	72	36	63	47	55	49	38	42	62	60
రక్తపోటు (y)	147	125	165	118	149	128	150	145	115	132	152	160

సాధన : మొదటి చలరాశుల అంకమధ్యమాలు, క్రమవిచలనాలు చలరాశుల మధ్య సహసంబంధ గుణకం గణిస్తాం.

x	y	x2	y2	xy
56	147	3,136	21,609	8,232
42	125	1,764	15,625	5,250
72	165	5,184	27,225	11880
36	118	1,296	13,924	4,248
63	149	3,969	22,201	9,387
47	128	2,209	16,384	6,016
55	150	3,025	22,500	8,250
49	145	2,401	21,025	7,105
38	115	1,444	13,225	4,370
42	132	1,764	17,424	5,544
62	152	3,844	23,104	9,424
60	160	3,600	22,500	9,000
622	1,676	33,636	2,36,746	88,706

అంకమధ్యమలు :

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{622}{12} = 51.8333$$

$$\bar{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i = \frac{1622}{12} = 139.6667$$

క్రమవిచలనాలు :

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{1}{n}\sum x_i^{\,2} - \bar{x}^2} = \sqrt{\frac{33636}{12} - \frac{(622)^2}{(12)^2}} = \sqrt{19728833-19506775} = 10.7845$$

$$\sigma_y = \sqrt{\frac{1}{n}\sum y_i^{\,2} - \bar{y}^2} = \sqrt{\frac{236746}{12} - \frac{(1676)^2}{(12)^2}} = \sqrt{19728.833-19506.775} = 14.9016$$

x, y ల మధ్య సహసంబంధ గుణకం

$$\frac{\frac{88,706}{12} - 51.8333*139.6667}{10.7845*14.9016} = \frac{152.7807}{160.7063} = 0.9507$$

ప్రతిగమన రేఖలు : x మీద y ప్రతిగమన రేఖ

$$y - \bar{y} = r\frac{\sigma_x}{\sigma_y}(x - \bar{x})$$

$$\text{i.e}(y - 139.6667) = 0.9507\left(\frac{14.9016}{10.7845}\right)(x - 51.8333)$$

$$\Rightarrow (y - 139.6667) = 1.3136 * 68.0903$$

$$\Rightarrow y = 1.3136 * 71.5764$$

Y మీద x ప్రతిగమన రేఖ

$$X - \bar{X} = r\frac{\sigma_x}{\sigma_y}(Y - \bar{Y})$$

$$\text{i.e}(X - 51.8333) = 0.9507\left(\frac{10.7845}{14.9016}\right)(Y - 51.8333) = 0.68804 - 96.0907$$

వయస్సు (x) **65** సంవత్సరాలు అయినప్పుడు రక్తపోటు (y) అంచనా వేయటానికి, x=65 ప్రతిమన రేఖలో x=**65** రాసి సూక్ష్మీకరించాలి.

$\therefore$ రక్తపోటు అంచనా

$$\hat{y} = 1.3136x71.5764$$
$$= 156.9604 \cong 157$$

ఉదాహరణ 11.3: గుంటూరు, గూడూరు వినియోగ వస్తువుల ధరలకు సంబంధించిన వివరాలు కింది విధంగా ఉన్నాయి. గూడూరు ధర 195 రూ అయినప్పుడు గుంటూరు అత్యధిక సంభవనీయ ధరను కనుక్కోండి?

	గూడూరు	**గుంటూరు**
సగటు ధర	165	158
క్రమవిచలనం	22.5	13.5

రెండు పట్టణాలలోను వినియోగ వస్తువుల ధరల మధ్య సహసంబంధ గుణకం 0.81. గుంటూరులో అత్యధిక సంభవనీయ ధర అంచనా వేయడానికి చిత్తూరుకు సంచింధించిన ప్రతిగమన రేఖ కావాలి. ధరలు గూడూరులో x, గుంటూరులో y అనుకుంటే y ప్రతిగమన రేఖ

$$y - \overline{y} = r\frac{\sigma_y}{\sigma_x}(x - \overline{x})$$

$$\text{i.e } y - 158 = 0.81x\frac{13.5}{22.5}(x - 165)$$

$$= 0.486(x - 165) = 0.486x - 80.19 \Rightarrow y = 0.486x + 77.81$$

గూడూరు ధర x =195 అయితే గుంటూరులో అత్యధిక సంభవనీయ ధర

y = 0.486 x 195+77.81 = రూ 172.58

శ్రేణీద్వయానికి ప్రత్యక్ష పద్ధతిలో ప్రతిగమనం:

ఉదా॥ 3. 4 : కింది పట్టిక లో ఒక వస్తువు డిమాండును (అవసరాన్ని) జనాభా మార్పుకు సంబంధించి ఇచ్చారు. జనాభా 15 యూనిట్లయితే డిమాండు ఎన్ని యూనిట్లో అంచనా చేయండి. డిమాండు 7.5 యూనిట్లయితే జనాభా ఎంత ఉంటుందో అంచనా చేయండి.

సంవత్సరం	1961	1962	1963	1964	1965	1966	1967	1968	1969	1970
డిమాండు (యూనిట్లలో)	2	3	4	3	5	7	6	8	10	9
జనాభా (యూనిట్లలో)	1	1	2	3	3	4	3	5	6	7
సంవత్సరం	1971	1972	1973	1974	1975	1976	1977	1978	1979	1980
డిమాండు (యూనిట్లలో)	8	9	11	8	7	10	11	9	11	10
జనాభా (యూనిట్లలో)	7	8	10	8	8	9	10	9	11	12

సూత్రాలు పద్ధతి :

x = డిమాండు y = జనాభా

n = [x,y] ల విలువల జతల సంఖ్యలుగా సంకేతిస్తాం. x, y విలువలు చిన్నవిగానే ఉన్నాయి. కాబట్టి ప్రత్యక్షపద్ధతిలోనే గణనచేస్తాం. దత్తాంశం నుంచి $\sum x, \sum y, \sum xy, \sum x^2, \sum y^2$ విలువలను గణిస్తాం.

$$\overline{x} = \frac{\sum x}{n}; \quad \overline{y} = \frac{\sum y}{n} \qquad (1)$$

$$b_{yx} = \frac{n\sum xy - \left(\sum x\right)\left(\sum y\right)}{n\sum x^2 - \left(\sum (x)^2\right)} \qquad (2)$$

$$b_{xy} = \frac{n\sum xy - (\sum x)(\sum y)}{n\sum y^2 - \left(\sum (y)^2\right)} \qquad (3)$$

x మీద y ప్రగ.స.రేఖ } $y - \overline{Y} = b_{xy}[x - \overline{x}]$ (4)

y మీద x ప్రగ.స.రేఖ } $x - \overline{x} = b_{xy}[y - \overline{y}]$ (5)

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{\sum x^2}{n} - \left[\frac{\sum x}{n}\right]^2}; \qquad \sigma_y = \sqrt{\frac{\sum y^2}{n} - \left[\frac{\sum y}{n}\right]^2} \qquad (6)$$

$$r = \sqrt{b_{YX} . b_{XY}} \qquad (7)$$

y విలువను అంచనావేయటానికి **(4)** ను x విలువలను అంచనా వేయటానికి **(5)** ను ఉపయోగించాలి.

గణన : పట్టిక

x	y	xy	x^2	y^2
2	1	2	4	1
3	1	3	9	1
4	2	8	16	4
3	3	9	9	9
5	3	15	25	9
7	4	28	49	16
6	3	18	36	9
8	5	40	64	25
10	6	60	100	36
9	7	63	81	49
8	7	56	64	49
9	8	72	81	64
11	10	110	121	100
8	8	64	64	64
7	8	56	49	64
10	9	90	100	81
11	10	110	121	100
9	9	81	81	81
11	11	121	121	121
10	12	120	100	144
151	127	1126	1295	1027
$\sum x$	$\sum y$	$\sum xy$	$\sum x^2$	$\sum y^2$

పట్టిక నుంచి $n = 20, \sum x = 151, \sum y = 127, \sum xy = 1126, \sum x^2 = 1295, \sum y^2 = 1027$

లను గ్రహించి సూత్రాలను (1) నుంచి (7) వరకు కిందివిధంగా ప్రయోగిస్తాం.

$\overline{x} = \frac{151}{20} = 7.55$ సూత్రం (1) నుంచి

$\overline{y} = \frac{127}{20} = 6.35$ సూత్రం (1) నుంచి

$$b_{yx} = \frac{20(1126) - (151)(127)}{20(1295) - (151)^2} = \frac{22520 - 19177}{25900 - 22801}$$

$\frac{3343}{3099} = 1.07887$ సూత్రం (2) నుంచి

$b_{xy} = \frac{20(1126) - (151)(127)}{20(1027) - (127)^2} = \frac{22520 - 19177}{20540 - 16129}$ సూత్రం (3) నుంచి

$$\frac{3343}{4411} = 0.7579$$

x మీద y ప్రగ.స.రేఖ } y-63.5 = 1.0787 (x-7.55) (4)

y = 1.0787x - 1.7942

y మీద x ప్రగ.స.రేఖ } x-7.55 = 0.7579 (y - 6.35) (5)

x = 0.75799y + 2.7373

డిమాండు (x) = 7.5 అయితే y = 1.0787 (7.5) - 17942, సమీకరణం (9) నుంచి అంటే y = 6.2961 యూనిట్ల జనాభా.

జనాభా (y) = 15 అయితే, x = 0.7579 (15) + 2.7373 (10) నుంచి అంటే x = 14.1058 యూనిట్ల డిమాండు.

$r = \sqrt{(1.0787).(0.7579)} = 0.9042$ సూత్రం (8) నుంచి

$$r^2 = 0.8175$$

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{1295}{20} - \left[\frac{151}{20}\right]^2}$$

$= \sqrt{64.75 - 57.0025}$ సూత్రం (6) నుంచి

$$= \sqrt{7.7475} = 2.7834$$

$$\sigma_y = \sqrt{\frac{1027}{20} - \left[\frac{127}{20}\right]^2}$$

$$= \sqrt{51.35 - 40.3225}$$ సూత్రం (6) నుంచి

$$= \sqrt{11.0275} = 3.3208$$

అనుమితి : x మీద y ప్ర.గ.సరేఖ: y=1.0787x - 1.7942

y మీద x ప్ర.గ.సరేఖ: x = 0.7579y + 2.7373

డిమాండు 7.5 యూనిట్లయితే జనాభా అంచనా = 6.2961 యూనిట్లు

జనాభా 15 యూనిట్లయితే డిమాండు అంచనా = 14.1058 యూనిట్లు

శ్రేణీద్వయానికి సులభపద్ధతిలో ప్రతిగమనం:

ఉదా॥ 3. 5 : కింది పట్టికలోని దత్తాంశం నుంచి X విలువ 125 అయితే Y ఎంతో అంచనా వేయండి. Y విలువ 10 అయితే X ఎంతో అంచనా వేయండి. ప్రతిగమన రేఖల మధ్య కోణాన్ని గణించండి.

X విలువ :	0-5	5-10	10-20	20-35	35-40	40-45	45-55	55-60
Y విలువ :	6.25	6.25	6.26	6.31	6.33	6.42	6.43	6.42
X విలువ :	60-70	70-85	85-100	100-105	105-110			
Y విలువ :	6.46	6.49	6.48	6.47	6.48			

ఉద్దేశం : రెండు ప్రతిగమన సరళరేఖలను కనుక్కొని వాటి నుంచి అంచనాలను కనుక్కోండి.

సూత్రాలు, పద్ధతి :

మొదట x యొక్క తరగతులను మధ్య విలువలను గణించాలి.

x = X తరగతి మధ్య విలువ

y = Y విలువ

n = [x, y] విలువల జతలసంఖ్యలుగా సంకేతిస్తాం. x^2 , y^2 , xy ల గణను సులభం చేయడానికి x ను

$U = \left[\frac{10x - 500}{25}\right]$ గాను, y ని V = [100y - 640] గాను మార్పుచేస్తాం.

ఈ సమస్యలో అంచనాలను అడిగారు కాబట్టి, ప్రతిగమన సరళరేఖలను కనుక్కోవాలి.

$$U = \frac{10x - 500}{25} \text{ కాబట్టి, } x = \frac{25U}{10} + \frac{500}{10}$$

$$\overline{x} = \frac{25}{10}\overline{U} + 50 = 2.5\frac{\sum U}{n} + 50,$$

$$\sigma x = 2.5\ \sigma_U = 25\sqrt{\frac{\sum U^2}{n} - \left[\frac{\sum U}{n}\right]^2}$$

ఇదేవిధంగా, $V = 100y - 640 \quad y = \frac{V}{100} + \frac{640}{100}$

కాబట్టి $\overline{y} = 0.01\overline{V} + 6.4 = 0.01\frac{\sum V}{n} + 6.4$ [3]

$$\sigma_y = 0.01\sigma_v = 0.01\sqrt{\frac{\sum v^2}{n} - \left[\frac{\sum V}{n}\right]^2}$$ [4]

$$\text{cov}(x, y) = \text{cov}(2.5U + 50, 0.01V + 6.41)$$

$$= 25 \times 0.01 \,\text{cov}[U.V]$$

$$= 2.5 \times 0.01\left[\sum\frac{UV}{n} - \frac{(\sum U)(\sum V)}{n^2}\right]$$ [5]

$$b_{yx} = \frac{\text{cov}(x,y)}{V(x)} = \frac{\text{cov}(x,y)}{\sigma x^2} \qquad [6]$$

$$b_{xy} = \frac{\text{cov}(x,y)}{V(y)} = \frac{\text{cov}(x,y)}{\sigma y^2} \qquad [7]$$

x మీద y ప్రగ.స.రేఖ } $y - \bar{y} = b_{yx}(x - \bar{x})$ [8]

ఈరేఖను 'y' అంచనాను గణించడానికి ఉపయోగిస్తాం.

y మీద x ప్రగ.స.రేఖ } $x - \bar{x} = b_{xy}(y - \bar{y})$ [9]

ఈరేఖను 'x' అంచనాను గణించడానికి ఉపయోగిస్తాం.

రెండు ప్ర.స.గ. రేఖల మధ్యగల కోణం } $\theta = \tan^{-1}\left[\left[\frac{I \approx r^2}{r^2}\right]\frac{\sigma_x\sigma_y}{\sigma_x^2 + \sigma_y^2}\right]$ [10]

$$r = \sqrt{b_{yx}.b_{xy}} \qquad [11]$$

గణన పట్టిక

x	y	$U = \frac{10x - 500}{25}$	$V = 100y - 640$	UV	U^2	V^2
2.5	6.25	-19	-15	285	361	225
7.5	6.25	-17	-15	255	289	225
15	6.26	-14	-14	196	196	196
27.5	6.31	-9	-9	81	81	81
37.5	6.33	-5	-7	35	25	49
42.5	6.42	-3	2	6	9	4
50	6.43	0	3	0	0	9
57.5	6.42	3	2	6	9	4
65	6.46	6	6	36	36	36
77.5	6.49	11	9	99	121	81
92.5	6.48	17	8	136	289	64
102.5	6.47	21	7	147	441	49
107.5	6.48	23	8	184	529	64
		14	**-15**	**1454**	**2386**	**1087**

పట్టిక నుంచి $n = 13, \sum U = 14; \sum V = -15, \sum UV = 1454$

$\bar{y} = 0.01\left(\frac{-15}{13}\right) + 64 = 6.3885$ విలువలను గ్రహించి సూత్రాలను (1) నుంచి (10) వరకు ఉపయోగిస్తాం.

$\bar{x} = 2.5\left(\frac{14}{13}\right) + 50 = 52.6923$ సూత్రం (1) నుంచి

సూత్రం (3) నుంచి

$\sigma_x = 2.5\sqrt{\frac{2386}{13} - (\frac{14}{13})^2} = 33.7619$ సూత్రం (2) నుంచి

$\sigma_y = 0.01\sqrt{\frac{1087}{13} - \left[\frac{-14}{13}\right]^2} = 0.82$

$\text{cov}(x, y) = 0.025\left[\frac{1454}{13} - (\frac{14}{13})(\frac{-15}{13})\right] = 2.8272$

$b_{yx} = \frac{2.8272}{(33.7619)^2} = 0.0025$ సూత్రం (6) నుంచి

$b_{xy} = \frac{2.8272}{(0.8228)^2} = 4.1761$ సూత్రం (7) నుంచి

x మీద y ప్రగ.స.రేఖ } $y-6.3885 = 0.0025(x-52.6923)$ సూత్రం (8) నుంచి [12]

$y = 0.0025x+6.2568$

y మీద x ప్రగ.స.రేఖ } $x - 52.6923 = 0.0025\,(y-6.3885)$ [13]

$x = 0.0025y + 52.6763$

$x = 125$ అయితే, $y = 0.0025\,(125) + 6.2568$ సూత్రం (12) నుంచి

$= 6.5693$

$y = 10$ అయితే, $x = 0.0025\,(10) + 52.6763)$ సూత్రం (13) నుంచి

$= 52.7013$

$$r = \sqrt{(0.0025)(4.1761)} = 0.1022$$ సూత్రం (11) నుంచి

అనుమితి : $x = 125$ అయితే $y = 6.5693$

$y = 10$ అయితే $x = 52.7013$

3.4 బహుళ ప్రతిగమనము:

ఒక ఆధారిత చలరాశి ఒకటి కంటే ఎక్కువ స్వతంత్ర చలరాశులచే ప్రభావితమైనపుడు ప్రతిగమన నమూనాను అంచనా వేయడం, దీనిని బహుళ ప్రతిగమనం (Multiple Regression) అంటాము.

ఉదాహరణకు మనం తీసుకున్న వినియోగ - ఆదాయ నమూనాలో ఆదాయం (X) మాత్రమే వినియోగాన్ని ప్రభావితం చేస్తుందనుకున్నాము. కాని సిద్ధాంతపరంగా ఆలోచిస్తే ఆస్తి, సంపద మొదలైన చలరాసులెన్నో వినియోగాన్ని ప్రభావితం చేస్తాయి. ఇంకో ఉదాహరణ తీసుకుందాం. ఒక వస్తువు డిమాండ్ ఆ వస్తువు ధరపై మాత్రమేకాక ఆ వస్తువుకు పూరక, ప్రత్యామ్నాయ వస్తువుల ధరలు, వినియోగదారుని ఆదాయం మొదలగు రాసులపై ఆధారపడుతుంది. అందువల్ల మన ప్రతిగమన నమూనాతోను రెండు కంటె ఎక్కువ చలరాశులను తీసుకునేందుకు వీలుగా పొడిగించాలి. బహుళ ప్రతిగమన నమూనాలో మూడు చలరాశుల నమూనా అనగా ఒక ఆధారిత చలరాశి రెండు స్వతంత్ర చలరాశుల గల నమూనా అతి సూక్ష్మమైనది.

రెండు చలరాశులలో కల ప్రతిగమన నమూనాను క్రింది విధంగా రాస్తాము.

$$Y_i = \beta_i + \beta_2 X_{2i} + \beta_3 X_{3i} + \mu_i$$

ఇందులో, Y ఆధారిత చలరాశి; X_2, X_3 లు స్వతంత్ర చలరాశులు; μ దోషపదము; i (1....n) పరిశీలనాంశాల సంఖ్య, పై సమీకరణంలో β_i Y అక్షం మీద అంతర ఖండనము. ఇది Y చలరాశిపై నమూనాలోకి తీసుకోబడని చలరాశుల సగటు ప్రభావాన్ని తెలుపుతుంది. β_2, β_3 అను పాక్షిక ప్రతిగమన గుణకాలంటాము.

పై సమీకరణంలోని ప్రతిగమన గుణకాలను ఏ స్వతంత్ర చలరాశికి చెందినవో సులభంగా గుర్తించడానికి ప్రతి పరామితికి పాదుకను చేరుస్తాము.

$$Y_i = \beta_{1.23} + \beta_{12.3} X_{2i} + \beta_{13.2} X_{3i} + \mu_i$$

వాడుకలోని 1 స్వతంత్ర చలరాశిని, 2 స్వతంత్ర చలరాశి X_2 ని, 3 స్వతంత్ర చలరాశి X_3 ని తెల్పుతాయి.

3.5 బహుళ నిర్ధారక గుణకం:

రెండు చలరాశుల సందర్భంలో ను ప్రతిగమన సమీకరణ సంధాన సఫలతకు (goodness of fit) మదింపుగా తీసుకున్నాము. ఇది Y రాశి విస్తృతిలో X రాశి వివరించిన భాగాన్ని తెలుపుతుంది. ఈ భావనను రెండుకంటె ఎక్కువ చలరాశులున్న సందర్భాలకు పొడిగించగలం. ప్రస్తుత సందర్భంలో X_2, X_3 లు సమిష్ఠిగా Y లోని విస్తృతిలో ఎంత భాగాన్ని వివరిస్తున్నాయో తెలుస్తుంది. దీనినే బహుళ నిర్ధారక గుణకమంటాము; దానికి $R^2{}_{1.23}$ ను సంకేతంగా వాడతాము. భావనాపరంపరగా ఇది r^2 కు సన్నిహితమైనది.

$$R^2_{1.23} = \frac{ESS}{TSS}$$

ఇందులో ESS అనగా అంచనా వర్గాల మొత్తం; TSS అనగా ఆధారిత చలరాశి వర్గాల మొత్తం

$$R_{1.23}^2 = \frac{\hat{\beta}_{12.3}\sum Y_i X_{2i} + \hat{\beta}_{13.2}\sum Y_i X_{3i}}{\sum Y_i^2}$$

$R_{1.23}^2$ విలువ విలువ వలెనే ఎల్లప్పుడు (0,1) అంతరంలో ఉంటుంది. దీని విలువ 1 అయితే సంధానపరచిన ప్రతిగమన రేఖ Y రాశిలోని విస్తృతిని నూటికి నూరుపాళ్ళు వివరించిందని అర్థం; 0 అయితే సంధానపరచిన రేఖ Y లోని విస్తృతిని ఎంతమాత్రం వివరించలేదని అర్థం. వాస్తవంలో ఈ రెండు విలువలు సంభవించవు. అందుచేత R^2 విలువ 1కి చేరువవుతున్న కొలదీ నమూనా సంధానము మెరుగుపడుతోందని అర్థం.

R^2 మరియు F ల మధ్య సంబంధం:

మూడు చలరాశుల సందర్భంలో F ను నిర్వచించాము. k చలరాశుల సందర్భంలో F ను నిర్వచించగలం.

$$F = \frac{ESS/K-1}{RSS/N-R}$$

ఇందులో R అంచనా వేయబడిన పరామితుల సంఖ్యను తెల్పుతుంది. K చలరాశులున్నప్పుడు K-1 స్వతంత్ర చలరాశులుంటాయి. వీటి K-1 వాలు గుణకాలు అంతర ఖండన కలిపితే K కు సమానము.

పై సూత్రాన్ని కొద్ది మార్పు చేసి రాస్తే క్రింది ఫలితాలను పొందుతాము.

$$F = \frac{N-K}{K-1}.\frac{ESS}{RSS} = \frac{N-K}{K-1}.\frac{ESS}{TSS-ESS}$$

$$= \frac{N-K}{K-1}.\frac{ESS/TSS}{1-\frac{ESS}{TSS}} = \frac{N-K}{K-1}.\frac{R^2}{1-R^2}$$

కాబట్టి F కి R^2 కి ఒక నిశ్చిత సంబంధం ఉంది. అంతేకాదు. ఈ సంబంధం ధనాత్మకమైంది. R^2 విలువ పెరిగేకొద్దీ (తగ్గేకొద్దీ) F విలువ కూడా పెరుగుతుంది (తగ్గుతుంది). కాబట్టి ప్రతిగమనపు మొత్తం ప్రాధాన్యతను పరీక్షించడానికి వాడుతున్న F పరీక్ష R^2 ప్రాధాన్యతను కూడా పరీక్షిస్తుంది. అనగా $H_0 : \beta_2 = \beta_3 = ... = \beta_k = 0$ అనే శూన్య పరికల్పన $R^2 = 0$ అనే పరికల్పనకు సమానమైనది. మూడు చలరాశుల సందర్భంలో F ను క్రింది విధంగా రాస్తాము.

$$F = \frac{R^2/2}{(1-R^2)/(N-3)}$$

F పరీక్షను R^2 ను వాడి జరిపితే మదింపు సులభంగా ఉంటుంది. ఎందుకంటే R^2 విలువ తెలిస్తే F విలువను సులభంగా కనుగొనవచ్చు.

ఉదాహరణకు $R^2_{new} = 0.9988\ R^2_{old} = 0.9978.$

$N = 15x_3$ ని చేర్చడం వల్ల ESS తగినంత పెరిగిందా?

$$F = \frac{(0.9988 - 0.9978)/1}{(1-0.9988)/12} = 10$$

(1,2) స్వేచ్ఛా డిగ్రీలకు F పట్టిక విలువ **9.33** కాబట్టి X_3 ని చేర్చడం వల్ల ESS తగినంతగా పెరుగుతోంది. కాబట్టి X_3 ని నమూనాలోకి తీసుకోవాలి.

3.6 సూక్ష్మ, పాక్షిక సహసంబంధ గుణకాలకు బహుళ నిర్ధారక గుణకానికి గల సంబంధం:

$$R^2_{1.23} = \frac{r^2_{12} + r^2_{13} - 2r_{12}r_{13}r_{23}}{1 - r^2_{23}}$$

$$= r^2_{12} + \left(1 - r^2_{12}\right)r^2_{13.2} = r^2_{13} + \left(1 - r^2_{13}\right)r^2_{12.3}$$

పై సంబంధాలను బట్టి ప్రతిగమన నమూనాలో స్వతంత్ర చలరాశుల్ని చేర్చేకొద్దీ R^2 విలువ పెరుగుతుందే కాని తగ్గదని గమనించవచ్చు. X_2, X_3 లు సమిష్టిగా వివరిస్తున్న Y లోని విస్తృతిని రెండు భాగాలుగా చేయవచ్చు. ఇవి : X_2 మాత్రమే వివరిస్తున్న భాగం (అనగా r^2_{12}, X_2 వివరించని భాగం మరియు X_2 ని స్థిరంగా ఉంచినప్పుడు X_3 వివరించిన భాగముల లబ్దము [అనగా $(1 - r^2_{12})r^2_{13.2}$] $r^2_{13.2}$ కనిష్ఠ విలువ శూన్యం కనుక $R^2_{1.23}$ విలువ r^2_{12} విలువ కంటె ఎక్కువగానే ఉంటుంది.

పై ఫలితాన్ని ఈ క్రిందివిధంగా కూడా రాయగలము.

$$-R^2_{1.23} = -r^2_{13} - (1 - r^2_{13})r^2_{12.3}$$

$$1 - R^2_{1.23} = 1 - r^2_{13} - (1 - r^2_{13})r^2_{12.3}$$

$$= (1 - r^2_{13})(1 - r^2_{12.3})$$

3.7 పాక్షిక ప్రతిగమన గుణకానికి మరియు సూక్ష్మసహసంబంధ గుణకాలకు గల సంబంధము:

ప్రతిగమన గుణకాలకు సూక్ష్మసహసంబంధ గుణకాలకు పాక్షికంగా గల సంబంధం

$$\hat{\beta}_{12} = r_{12}\frac{S_1}{S_2}$$

$$\hat{\beta}_{13} = r_{13}\frac{S_1}{S_3}$$

$$\hat{\beta}_{23} = r_{23}\frac{S_2}{S_3}$$

$$\hat{\beta}_{32} = r_{12}\frac{S_2}{S_1}$$

$$\hat{\beta}_{12.3} = \frac{\hat{\beta}_{12} - \hat{\beta}_{13}\,\hat{\beta}_{32}}{1-\hat{\beta}_{23}\,\hat{\beta}_{32}}$$

$$= \frac{r_{12}\frac{S_1}{S_2} - r_{13}\,r_{32}\frac{S_1S_3}{S_2S_3}}{1-r_{23}\frac{S_2}{S_3}\,r_{32}\frac{S_3}{S_2}}$$

$$= \frac{r_{12} - r_{13}}{1-r_{23}r_{32}}\frac{S_1}{S_2}$$

ఇదేవిధంగా $\hat{\beta}_{13.2} = \dfrac{r_{13} - r_{12}r_{23}}{1-r_{32}r_{23}}\dfrac{S_1}{S_3}$

ఉదా॥ 3. 6 : ఒక గ్రామంలోని కుటుంబాల నుండి 10 కుటుంబాల ప్రతిరూపాన్ని తీసుకుని ఒక వారంలో వారి తలసరి ఆదాయ వినియోగ వ్యయాలపై దత్తాంశాలు సేకరించబడ్డాయి.

వినియోగ వ్యయం (Y)			70	65	90	95
ఆదాయం (X)			80	100	120	140
110	115	120	140	155	150	
160	180	200	220	240	260	

Y_i	X_i	X_iY_i	x_i^2	$x_i = X_i - \overline{X}$	$y_i = Y_i - \overline{Y}$	x_i^2	x_iy_i
70	80	5600	6400	-90	-41	8100	3690
65	100	6500	10000	-70	-46	4900	3220
90	120	10800	14400	-50	-21	2500	1050
95	140	13300	19600	-30	-16	900	480
110	160	17600	25600	-10	-1	100	10
115	180	20700	32400	10	4	100	40
120	200	24000	40000	30	9	900	270
140	220	30800	48400	50	29	2500	1450
155	240	37200	57600	70	44	4900	3080
150	260	39000	67600	90	39	8100	3570
మొత్తం	1700	205500	322000	0	0	33000	16800 =1110
సగటు	170			0	0 = 111		

$$\hat{\beta}_2 = \frac{\sum x_i y_i}{\sum x_i^2} = \frac{16800}{33000} = 0.584$$

$$\hat{\beta}_1 = \overline{Y} - \hat{\beta}_2 \overline{X} = 111 - 0.509 \times 170 = 24.47$$

$\hat{\beta}_1$ కనుగొనడానికి రెండవ సూత్రము ఉపయోగించవచ్చు.

$$\hat{\beta}_2 = \frac{n\sum x_i y_i - \sum x_i y_i}{n\sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}$$

$$= \frac{10 \times 205500 - 1700 \times 1110}{10 \times 322000 - 1700 \times 1700}$$

$$= \frac{168000}{33000} = 0.509$$

$$\hat{y}_i = 24.47 + 0.509x_i$$

దీనిని X మీద Y ప్రతిగమనరేఖ అంటాము.

3.8 సూక్ష్మ, పాక్షిక ప్రతిగమన గుణకములు :

Y చలరాశిని X చలరాశిపై ప్రతిగమనం చేయగా పొందిన సమీకరణాన్ని

$Y = \hat{\beta}_{1.2} + \hat{\beta}_{12}X_2$ అని Y ని X_3పై ప్రతిగమనం చేయగా పొందిన సమీకరణాన్ని

$Y = \hat{\beta}_{1.3} + \hat{\beta}_{13}X_3$ అని X_3ని X_2 పై ప్రతిగమనం చేయగా పొందిన సమీకరణాన్ని

$X_3 = \hat{\beta}_{3.2} + \hat{\beta}_{3.2}X_2$ అని X_2ని X_3 పై ప్రతిగమనం చేయగా పొందిన సమీకరణాన్ని

$X_2 = \hat{\beta}_{2.3} + \hat{\beta}_{2.3}X_3$ రాద్దాము. రెండు చలరాశుల ప్రతిగమనంలో ప్రతిగమన గుణకాలకు సూత్రాలను తెలుసుకున్నాము. అవి

$$\hat{\beta}_{12} = \frac{\sum X_{2i}Y_i}{\sum X_{2i}^2};\hat{\beta}_{23} = \frac{\sum X_{2i}X_{3i}}{\sum X_{2i}^2};\hat{\beta}_{13} = \frac{\sum X_{3i}Y_i}{\sum x_{3i}^2}, \quad \hat{\beta}_{32} = \frac{\sum X_{2i}Y_{3i}}{\sum X_i^2}$$

ఇప్పుడు త్రిచలరాశి ప్రతిగమనంలోని ప్రతిగమన గుణకాన్ని పరీక్షిద్దాము.

$$\hat{\beta}_{12.3} = \frac{\left(\sum Y_iX_{2i}\right)\left(\sum X_{3i}^2\right) - \left(\sum Y_iX_{3i}\right)\left(\sum X_{2i}X_3\right)}{\left(\sum X_{2i}^2\right)\left(\sum X_{3i}^2\right) - \left(\sum X_{2i}X_{3i}\right)^2}$$

$$= \frac{\left(\frac{\sum Y_iX_{2i}}{\sum X_{2i}^2}\right)\left(\sum X_{3i}^2 \sum X_{2i}^2\right) - \left(\frac{\sum Y_iX_{3i}}{\sum X_{3i}^2}\right)\left(\sum X_{3i}^2\right)\left(\frac{\sum X_iX_{3i}}{\sum X_{2i}^2}\right)\left(\sum X_{2i}^2\right)}{\left(\sum X_{2i}^2\right)\left(\sum X_{3i}^2\right) - \left(\frac{\sum X_{2i}X_{3i}}{\sum X_{2i}^2}\right)\left(\frac{\sum X_{2i}X_{3i}}{\sum X_{3i}^2}\right)\left(\sum X_{2i}^2\right)\left(\sum X_{3i}^2\right)}$$

$$= \frac{\hat{\beta}_{12} - \hat{\beta}_{13}\hat{\beta}_{32}}{1 - \hat{\beta}_{23}\hat{\beta}_{32}}$$

ఇదేవిధంగా $$\hat{\beta}_{13.2} = \frac{\hat{\beta}_{13} - \hat{\beta}_{12}\hat{\beta}_{23}}{1 - \hat{\beta}_{32}\hat{\beta}_{23}}$$

3.9 సారాంశము :

రెండు చలరాశుల మధ్యగల సంబంధములను గమనించుటలో ప్రతిగమనము ఒకటి. రెండు చలరాశుల మధ్య బీజీయ ప్రమేయాన్ని సంధానముచేసి తెలియని రాశుల విలువలను తెలుసుకొనుటయే ప్రతిగమన పద్ధతి. కనిష్ఠ వర్గాల పద్ధతితో పారామితియులను గణనచేయుట ఇందులో ఒకభాగము. సామాన్య సమీకరణములను రాబట్టి వాటిని సాధించుట ద్వారా ప్రతిగమన రేఖలను రచించి చలరాశి విలువలను ఊహింపవచ్చు. అందుచేత ఊహించి రాబోవు దత్తాంశ నిర్ధారణకు ప్రతిగమన పద్ధతి చక్కగా ఉపయోగపడును. అంతేకాక రెండు అంతకంటే ఎక్కువ ఉన్న చలరాశుల మధ్య గల సంబంధాలను సూక్ష్మ, పాక్షిక ప్రతిగమన పద్ధతులద్వారా గణించవచ్చు. బహుళ ప్రతిగమన పద్ధతితో ఎక్కువ స్వతంత్రచలరాశులచే ఒక ఆధారిత చలరాశి ప్రభావితమైన విధము తెలుసుకొనవచ్చును మొదలగు విషయాలను ఈ పాఠంలో తెలుసుకొన్నాము.

3.10 స్వయం సమీక్షా ప్రశ్నలు:

1. క్రింది దత్తాంశం నుంచి ఉత్పత్తి, ఎగుమతుల మధ్య గల సంబంధాన్ని సరళరేఖల రూపంలో చూపండి. ఉత్పత్తి 150 యూనిట్లయితే ఎగుమతి ఎంత ఉండవచ్చు. సరళరిఖల మధ్య కోణాన్ని గణించండి.

ఉత్పత్తి:	200	275	350	425	500	375	650	725	800	875	950	1025	1100
(యూనిట్లలో)	1175	1250	1325	1400									
ఎగుమతి:	125	150	175	200	225	250	275	300	325	350	375	400	425
(యూనిట్లలో)	450	475	500	525									

2. ఈ క్రింది దత్తాంశానికి కార్ల్‌పియర్సన్ సహసంబంధతా గుణకాన్ని గణించి రెండు ప్రతిగమన రేఖలను కనుక్కోండి. ఎగుమతులు రూ॥ 175 కోట్లు అయినప్పుడు దిగుమతులు ఎంతో అంచనావేయండి. దిగుమతులు రూ॥ 46 కోట్లు అయినప్పుడు ఎగుమతులు ఎంత?

ఎగుమతులు: (కోట్ల రూ॥)	102	131	145	139	142	150	160	167	172	184	200	190	200
దిగుమతులు:	75	68	71	65	60	51	55	60	50	42	40	31	26

3. ఒక గ్రామంలోని కుటుంబాల నుండి 12 కుటుంబాల ప్రతి రూపాన్ని తీసుకొని ఒక వారంలో వారి తలసరి ఆదాయ వినియోగ వ్యయాల పై దత్తాంశాలు సేకరించబడ్డాయి.

వినియోగ వ్యయం(Y):	70	90	80	110	120	155	65	95	115	140	150	100
ఆదాయం (X):	80	120	160	200	240	100	140	180	220	260	170	200

3.11 గుర్తుంచుకోవల్సిన అంశములు:

r_{xy} = 0 అయిత రెండు ప్ర.గ.స. రేఖలు ఒకదానికొకటి లంబంగా ఉంటాయి. వాటి మధ్య కోణం $\theta = 90^0 = \frac{\pi}{2}$ అవుతుంది. $r_{xy} = \pm 1$ అయితే, రెండు ప్ర.గ.స. రేఖలు ఏకీభవిస్తాయి. వాటి మధ్య కోణం = 0^0 లేదా π అవుతుంది.

3.12 చదువవలసిన్పుస్కలాలు:

1. Fundamentals of Mathematical Statistics : S.C. Gupta & V.K. Kappoor, Publishel S.Chand & Co.
2. Basic Statistics by B.L. Agarwal, Third Edition, New Age International (p) Limited.

పాఠం 4 కాలశ్రేణుల విశ్లేషణ

ఉద్దేశ్యం

ఈ పాఠ్యంశం అధ్యయనం చేయడం వలన మీరు : -

* కాలశ్రేణుల విశ్లేషణ గురించి విద్యార్థులకు అవగాహన కల్గించడం
* కాలశ్రేణుల విశ్లేషణ ప్రాముఖ్యతను విశదీకరించడం

చేయగల్గుతారు.

పాఠ్య నిర్మాణ క్రమం

4.1 ఉపోద్ఘాతం
4.2 నిర్వచనాలు
4.3 ఉద్దేశాలు
4.4 ప్రాముఖ్యత

4.1 ఉపోద్ఘాతం:

భవిష్యత్తు గురించి ఇతమిద్ధంగా ఎవరూ, ఏమీ చెప్పలేరు. రేపు ఏం జరుగుతుందో ఎవరికీ తెలియదు. కానీ, ఆర్థిక, వ్యాపార, వాణిజ్య రంగాలలో భవిష్యత్తు గురించి అంచనా వేయడం తరచు అవసరమవుతుంటుంది. వచ్చే సంవత్సరం ఎన్ని వస్తువులు అమ్ముడుపోతాయో ఒక అంచనా లేకపోతే, వ్యాపారస్తుడు ఇబ్బందుల పాలవుతాడు. వచ్చే సంవత్సరము అమ్మకం ఎంత వుంటుందో, వ్యాపారస్తుడు అంచనా వేసి దానికి తగినట్లుగా ముడి పదార్ధాలు కొనుగోలు చేయడం, వస్తుత్పత్తి చేపట్టడం జరుగుతుంది.

భవిష్యత్తు గురించి అంచనా వేయడానికి గణాంక శాస్త్రం ఉపయోగపడుతుందని మనం గతంలో నేర్చుకున్నాము. గణాంక శాస్త్ర ముఖ్య విధులలో అది ఒకటి. భవిష్యత్తు అంచనాలకు భూతకాల దత్తాంశం ఆధారము. గతాన్ని జాగ్రత్తగా అధ్యయనం చేసి భవిష్యత్తు గురించి ఒక అంచనా రూపొందించుకుంటాము.

గతంలో సంభవించిన కాలానుగతమైన మార్పులను తెలిసుకోవడము ఎంతైనా అవసరం. 1980లో అమ్మకాలు ఎలా వున్నాయి. 1985లో ఎలా వున్నాయి, 2000లో ఎలా వున్నాయి, వాటిని పరిశీలించి, 2005లో అమ్మకాలు ఎలా ఉంటాయో అంచనా వేయగలం. గత అమ్మకాలను ఇలా కాలానుగుణంగా అమరిస్తే వాటినే 'కాలశ్రేణులు' అంటాము.

గణాంక దత్తాంశాన్ని కాలానికి అనురూపంగా ఒక క్రమంలో రాస్తే వచ్చే శ్రేణిని కాలశ్రేణి అంటారు. వీటినే చారిత్రక శ్రేణులు అని కూడా వ్యవహరిస్తారు. ఒక శ్రేణి సాధారణంగా రెండు చలరాశుల మధ్య సంబంధాన్ని సూచిస్తుంది. ఈ రెండు చలరాశులలో ఒకటి తప్పనిసరిగా కాలమై ఉంటుంది. రెండవది ఉత్పత్తి గావచ్చు. అమ్మకాలు గావచ్చు. ధరలు గావచ్చు. ఏదయినా గావచ్చు. కాలం, చలరాశి అనే రెండు చలనాల మధ్య గల సంబంధాన్ని 'కాలశ్రేణులు' వెల్లడిస్తాయి.

4.2 నిర్వచనాలు :

'కెన్నీ అండ్ కీటింగ్'ల ప్రకారం - కాలంపై ఆధారపడిన దత్తాంశ సముదాయాన్నే కాలశ్రేణులు అంటారు.

'చౌ' నిర్వచనం ప్రకారం - ఒక చలరాశి లేదా అనేక చలరాశుల సమూహం అనేక కాల బిందువుల వద్ద తీసుకునే విలువల సమూహమే కాలశ్రేణులు.

'హంబర్గ్' అభిప్రాయం ప్రకారం గణాంక పరిశీలనలను కాలానుక్రమంలో అమర్చడాన్నే కాలశ్రేణులు అంటారు.
'క్రాక్సటన్ మరియు కాడెన్'ల ప్రకారం కాలానుగతంగా అమర్చబడిన దత్తాంశాన్నే కాలశ్రేణులు అంటారు.

'హిర్ష్' ఉద్దేశంలో ఒక చలరాశి కాలానుగుణంగా తీసుకున్న విలువలను కాలశ్రేణి అంటారు.

కాలం గడిచేకొద్దీ ప్రతి చలరాశి విలువలో మార్పులు సంభవిస్తుంటాయి. అనేక కారణాల వల్ల, ఎన్నో రకాల శక్తుల సంయుక్త, పరస్పర ప్రభావం వల్ల ఈ మార్పులు వస్తుంటాయి. వీటిని విశ్లేషణ చేయడం ద్వారానే భవిష్యత్తుకు సంబంధించిన చలరాశి మార్పులను అంచనావేయగలుగుతాము. దీనినే 'కాలశ్రేణుల విశ్లేషణ' అంటారు. ఈ కాలశ్రేణుల విశ్లేషణ వ్యాపారస్తులకే కాక ఆర్థికవేత్తలకు, వ్యవసాయ శాస్త్రజ్ఞులకు, భూగర్భశాస్త్రవేత్తలకు - ఇలా అనేక మందికి ఉపయోగపడుతుంది.

4.3 ఉద్దేశాలు :

కాల శ్రేణుల విశ్లేషణ అనేది దిగువ ఉద్దేశాలతో చేపట్టడం జరుగుతుంది.

1) దత్తాంశంలో నియమత్వం లేదా క్రమత్వాన్ని నిర్ణయించడం.

2) దత్తాంశంలోని మార్పులలో క్రమమైన పెరుగుదల, తగ్గుదలను అధ్యయనం చేసి ప్రవృత్తి (ధోరణి)ని కనుగొనడం.

3) ప్రవృత్తిని నిర్ణయించి, నియమిత కాలికంగా, ఆకస్మికంగా పరిణమించే మార్పులను నియంత్రణ చేయడం.

4) భూతకాలంలో గమనించిన మార్పులను ఆధారంగా చేసుకొని, భవిష్యత్తులో వచ్చే మార్పులను అంచనా వేయడం.

5) భవిష్యత్ కాలంలో మార్పులను అంచనా వేసి, వాటి కనుగుణంగా ప్రణాళికలను రూపొందించడం.

6) శాస్త్రీయ పద్ధతిలో వ్యాపార చక్రాలను పరిశీలించి, ఆర్థిక స్థిరత్వాన్ని నివారించడం,

7) వివిధ కాలాల్లో, వివిధ ప్రదేశాల్లో, వివిధ చలరాశుల్లో సంభవించే మార్పులను అధ్యయనం చేయడం.

4.4 ప్రాముఖ్యత :

కాలశ్రేణుల విశ్లేషణ ద్వారా అందరూ అన్ని రంగాలలో భూతకాల దత్తాంశ ప్రవర్తన ఎలా ఉందో తెలుసుకొని, దాని ఆధారంగా భవిష్యత్తులో దత్తాంశ ప్రవర్తనను అంచనా వేసుకోవచ్చు. ఈ కాలశ్రేణుల విశ్లేషణ ప్రాముఖ్యతను కింది అంశాలు వివరిస్తాయి.

4.4.1. చలరాశి ప్రవర్తన విశ్లేషణ : భూతకాలానికి సంబంధించిన దత్తాంశాన్ని నిశితంగా పరిశీలిస్తే, దత్తాంశం మార్పుకు కారణాలేమిట లోఏ యే శక్తులు దాన్ని ప్రభావితం చేస్తున్నాయో సులభంగా అర్థం చేసుకోవచ్చు. చలరాశి విలువలు ఋతువుల వల్ల ఎంతప్రభావితమయిందీ, వ్యాపారచక్రాలవల్ల ఎంత వరకు ప్రభావితమయిందీ తెలుసుకోవచ్చు. ఈ విధంగా చలరాశుల ప్రవర్తనను మనం అవగాహన చేసుకోవచ్చు.

4.4.2. తులనాత్మక పరిశీలన : కాలశ్రేణులను విశ్లేషణ చేసి, చలరాశిలో మార్పులకు కారణమయిన వివిధ శక్తుల గురించి తెలుసుకోవచ్చు. అంతేకాక, ఈ వివిధ శక్తుల ప్రభావాలను వేరు చేసి, వీటిని తులనాత్మకంగా అధ్యయనం చేయవచ్చు. చలరాశిలో మార్పులకు ఏ శక్తి ప్రభావం ఎంత వరకు, ఏ మేరకు ఉందో పోల్చి చూడవచ్చు.

4.4.3. భవిష్యత్ అంచనా : చలరాశి గత ప్రవర్తనను ప్రాతిపదికగా చే ుకొని, భవిష్యత్తులో దాని ప్రవర్తనను అంచనా వేయవచ్చు. ఈ అంచనా భవిష్యత్ కార్యాచరణ ప్రణాళికను రూపొందించుకోవడానికి ఎంతగానో ఉపయోగపడుతుంది.

4.4.4 నిర్ణయాలు చేయడం : అనేక సందర్భాలలో వివిధ విషయాలపై నిర్ణయాలు చేయడానికి కాలశ్రేణుల విశ్లేషణ ఎంతగానో దోహదపడుతుంది. భవిష్యత్తులో చలరాశిని మార్చే కొన్ని శక్తుల ప్రభావాన్ని పరిమితం చేయడానికి వీలవుతుంది. వ్యాపార విస్తృతి, ధరల నియంత్రణ, ఉత్పత్తి నియంత్రణ వంటి ఎన్నో విధాన నిర్ణయాలు తీసుకోవడంలో కాలశ్రేణుల అవగాహన ఎంతగానో ఉపకరిస్తుంది.

ఈ విధంగా కాలశ్రేణుల విశ్లేషణ, ఆర్థిక, వ్యాపార, వాణిజ్య, పారిశ్రామిక, వ్యవసాయక, శాస్త్ర విజ్ఞాన రంగాలలో ఎంతో ప్రాముఖ్యతను సంతరించుకొంది. భవిష్యత్తు గురించి ఆలోచించడం, కార్యాచరణ ప్రణాళిక రూపొందించుకోవడం - అందరూ చేసే పనే ఈ క్రమంలో కాలశ్రేణుల విశ్లేషణ విశేషంగా మనకు ఉపయోగపడుతుంది.

రచయిత

డా॥ పి. సి. సాయిబాబా

పాఠం 5 కాలశ్రేణులలోని భాగాలు - ప్రవృత్తి గణన

(Components of Time Series - Measurement of Trend)

ఉద్దేశ్యం

ఈ పాఠ్యాంశం అధ్యయనం చేయడం వలన మీరు : -

* కాలశ్రేణులలోని వివిధ భాగాల గురించి వివరంగా తెలుసుకొనగలరు
* విశ్లేషించి కాలశ్రేణి ప్రవృత్తిని గణన చేయడము కూడా తెలుస్తుంది

పాఠ్య నిర్మాణ క్రమం

5.1 ఉపోద్ఘాతం
5.2 దీర్ఘకాలిక ప్రవృత్తి
5.3 ఋతు సంబంధ విచరణాలు
5.4 చక్రీయ విచరణాలు
5.5 క్రమరహిత విచరణాలు
5.6 ప్రశ్నలు

5.1 ఉపోద్ఘాతం:

కాలశ్రేణులలోని భాగాలను (Components) అంశాలు అని కూడా అంటారు. కాలశ్రేణులలో సంభవించే మార్పుల కారణాలను కాలశ్రేణులలోని భాగాలు అంటారు. ఈ మార్పులు నాలుగు రకాలుగా విభజించబడినాయి. అవి

(ఎ) దీర్ఘకాలిక ప్రవృత్తి(Secular Trend)

(బి) ఋతు సంబంధ విచరణాలు (Seasonal Variations)

(సి) చక్రీయ విచరణాలు (Cyclical Variations)

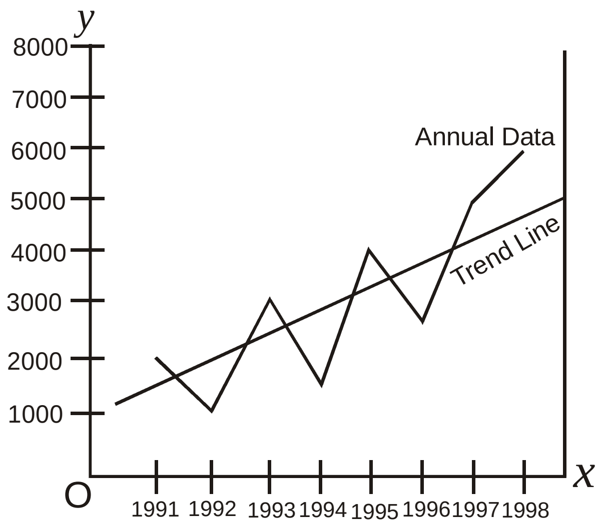
(డి) క్రమరహిత విచరణాలు (Irregular Variations)

5.2 దీర్ఘకాలిక ప్రవృత్తి (Secular Trend):

దీర్ఘకాలానికి చెందిన దత్తాంశములోని విలువలు క్రమంగా పెరుగుచున్నాయో లేక తగ్గుచున్నాయో ప్రవృత్తి (trend) తెలుపుతుంది. దత్తాంశములో పెరుగుదల లేదా తగ్గుదల లేదా నిలకడగా ఉండే సాధారణ ప్రవృత్తిని దీర్ఘకాలిక ప్రవృత్తి అంటారు. అంటే కాలశ్రేణులలో మొత్తం మీద సాధారణ పెరుగుదల లేదా తగ్గుదల లేదా స్థిరముగా ఉండడమే దీర్ఘకాలిక ప్రవృత్తి అని అర్థం.

సింప్సన్, కఫ్కాల ప్రకారం " శ్రేణులలో కొంత కాలంపాటు కలిగే సాధారణ పెరుగుదల లేదా క్షీణతా స్థితిని దీర్ఘకాలిక ప్రవృత్తి అంటారు. ఇందులో స్వల్పకాలిక మార్పులు చేరవు. కాని దీర్ఘకాలంలో వచ్చే స్థిరమైన మార్పులు చేరతాయి".

క్రింది రేఖా చిత్రంలో దీర్ఘకాలిక చలనాలను సరళరేఖగా చూపడమైనది. దీనినే ప్రవృత్తి రేఖ అంటారు. ఈ రకమైన ధోరణి సాధారణంగా ఆర్థిక, వ్యాపార శ్రేణులలో కన్పిస్తుంది.



లక్షణాలు :

1. ఇది సాధారణ, మృదువైన దీర్ఘకాలిక చలనత్వం, దీర్ఘకాలంలోని మధ్య మధ్య కాలాలలో పెరుగుదల, తగ్గుదల, స్థిరతాగమనాలు కనిపించినప్పటికీ మొత్తం మీద ఈ మార్పు పైకి పెరగడం లేదా క్రిందికి పడిపోవడం లేదా నిలకడగా ఉండడాన్ని సూచిస్తుంది.

2. దీర్ఘకాలం అనే భావన సాపేక్ష పదం ఇది దత్తాంశ స్వభావంపై ఆధారపడి ఉంటుంది. అయితే కొన్ని విషయాలలో కొద్ది గంటల సమయం కూడా చాలా ఎక్కువగా అనిపిస్తుంది. ఉదా॥ ఉష్ణోగ్రత లెక్కింపు. మరికొన్ని విషయాలకు మూడు, నాలుగు సంవత్సరాల కాలం కూడా దీర్ఘకాలంగా అనిపించదు. యదార్థ పరిస్థితిని తెలుసుకోవడానికి రెండు లేక మూడు సంక్లిష్ట కాల చక్రాలకు సంబంధించిన కాలశ్రేణుల విలువలను పరిశీలించవలె. కాల విస్తృతి పెరుగుతున్న కొలదీ ప్రవృత్తి కూడా ప్రముఖంగా పెరుగుతుంది.

3. సరళరేఖీయ, వక్రరేఖీయ ప్రవృత్తి : రేఖాపటంపై కాలశ్రేణి దత్తాంశం సరళరేఖగా ఏర్పడితే దానిని సరళరేఖా ప్రవృత్తి (Liner Trend) అంటారు. అలాకాకపోతే వక్రరేఖీయ ప్రవృత్తి (Non-Linear Trend) అంటారు. ఆచరణలో సాధారణంగా సరళరేఖా ప్రవృత్తులనే ఉపయోగిస్తారు. ఈ ప్రవృత్తులు ప్రారంభంలో నెమ్మదిగా ఉండి, కొంత కాలంపాటు పెరుగుతూ, ఆ తర్వాత కొంతకాలం స్థిరంగా ఉండి చివరకు తగ్గుతాయి.

4. కాలశ్రేణుల విశ్లేషణలో దీర్ఘకాలిక ప్రవృత్తి విలువలను సామాన్య విలువలుగా తీసుకోబడతాయి. వీటి ఆధారంగా దత్తాంశాన్ని ప్రభావితం చేసే ఇతర అంశాలను అధ్యయనం చేయడం వీలవుతుంది.

5.3 ఋతు సంబంధ విచరణాలు (Seasonal Variations) :

ఒక వ్యాపార సంవత్సరంలో వ్యాపార ప్రక్రియలో కాలానుగుణంగా సంభవించే మార్పులను ఋతు మార్పులు లేదా ఋతు విచరణాలు అంటారు. ఈ మార్పులు ప్రతి సంవత్సరం పునరావృతం అవుతుంటాయి. దత్తాంశాన్ని వార్షిక సంఖ్యలుగా ఇచ్చినప్పుడు, దానిలో ఋతు సంబంధమైన హెచ్చుతగ్గులు ఉండవు. అనగా ఒక సంవత్సర కాలంలో గాని, అంతకంటే తక్కువ కాలంలో క్రమం తప్పకుండా నియతికాలికంగా ప్రతి సంవత్సరం ఇంచు మించుగా ఒకే రీతిలో సంభవించే మార్పులను ఋతు సంబంధ విచరణాలు అంటారు. ధరలు, అనేక వస్తువుల ఉత్పత్తి, వస్తువుల వినియోగం, వడ్డీ రేట్లు మొదలైన అనేక అంశాలు ఋతుసంబంధమైన మార్పులచే ప్రభావితమౌతాయి. ఋతు సంబంధ మార్పులకు కారణాలు : ఇవి ప్రధానంగా రెండు. ఒకటి సహజ కారణాలు, రెండు మానవ సాంప్రదాయాలు.

(ఎ) సహజ కారణాలు : ఋతు సంబంధ విచరణాలకు ముఖ్యకారణం సహజ శక్తులైనటువంటి వివిధ ఋతువులు, వాతావరణ స్థితిగతులు, వాతావరణ మార్పులు అని చెప్పవచ్చును. వర్షపాతం, తేమ, ఉష్ణోగ్రత మొదలైన వాతావరణ మార్పులు ఒక్కొక్క పరిశ్రమపై, వ్యాపారంపై వివిధ రకాల ప్రభావం చూపుతాయి. ఉదా : - వరి, గోధుమ, పప్పు ధాన్యాలు మొదలైన వాటి ఉత్పత్తి ఋతువులపై ఆధారపడి ఉంటుంది. అదే విధంగా ఉన్ని వస్త్రాలకు చలికాలంలో డిమాండ్ ఎక్కువగాను, చల్లని పానీయాలకు వేసవి కాలంలో ఎక్కువ డిమాండ్‌గాను ఉండడం.

(బి) మానవ సాంప్రదాయాలు : కాలశ్రేణులను ప్రభావితం చేసే రెండవ అంశం - సమాజంలోని ప్రజల అలవాట్లు, సాంప్రదాయాలు, ఆచారాలు, అభిరుచులు, కట్టుబాట్లు మొదలైనవి. ఉదా:- పెళ్ళిళ్ళకాలంలో, పండగల సమయంలో వస్త్రాలు, పంచదార మొదలైన వాటి అమ్మకాలు ఎక్కువగా ఉండడం.

కాలశ్రేణుల విశ్లేషణలో ఋతుసంబంధ విచరణాల అధ్యయనం చాలా ముఖ్యమైనది. ప్రవృత్తి నుండి వాటిని వేరుచేసి అధ్యయనం చేయడం వలన భవిష్యత్ కొనుగోళ్లు, అమ్మకాలు, ఉత్పత్తి ప్రకటన కార్యక్రమాలు మొదలైన వ్యాపార నిర్ణయాలు, చేయడానికి వ్యాపార విధానాలు రూపొందించడానికి వీలవుతుంది. ఋతు సంబంధ మార్పుల అవగాహన లేకపోతే ఒక ఋతువులో కలిగిన పెరుగుదలను పొరబాటున వ్యాపార ప్రోత్సాహస్థితి గాను, తగ్గుదలను వ్యాపార క్షీణత స్థితిగాను భావించే అవకాశం వుంది. ఋతు సంబంధ మార్పుల అధ్యయనం వలన వ్యాపార నిర్ణయాలు సక్రమంగా, వాస్తవానికి దగ్గరగా ఉంటాయి.

5.4 చక్రీయ విచరణాలు (Cyclical Variations) :

కాలశ్రేణులలో అధ్యయన కాలం 12 నెలలకు మించి ఉండి, తొమ్మిది లేదా పది సంవత్సరాల వరకు కొనసాగుతూ ఉండి, ఈ మధ్య కాలంలో మార్పులు లేదా విచరణాలు మళ్ళీ మళ్ళీ పునరావృతం అవుతూ ఉంటే వాటిని 'చక్రీయ విచరణాలు' అంటారు. ఇందులో నియతికాలికంగా వచ్చే పెరుగుదల లేదా తగ్గుదల ధోరణులు ఆర్థిక దత్తాంశములో అలలుగా కనిపిస్తాయి. అందుచేతనే వీటిని చక్రీయ హెచ్చుతగ్గులు అంటారు. డిమాండ్, సప్లయ్‌ల సమతుల్యతను ప్రభావితం చేసే అనేక సంక్లిష్ట శక్తుల సమ్మేళనం వలన వచ్చే ఈ మార్పులు మూడు నుంచి పది సంవత్సరాలలోపు ఎప్పుడైనా పునరావృతం కావచ్చును. వీటి కాలపరిమితి 12 నెలలకు మించడం వలన వీటిని "వ్యాపార చక్రాలు" అని కూడా అంటారు. చక్రీయ విచరణాలను దీర్ఘకాలమార్పులుగా పరిగణించవచ్చు. వీటిలో 4 దశలుంటాయి. అవి వ్యాపార విజృంభణ లేదా వ్యాపారం అభివృద్ధి చెందడం (Prosperity), క్షీణదశ లేదా అల్పమాంధ్యం (Recession), ఆర్థిక మాంధ్యం (Depression), పురోగతి లేదా పునరుద్దానం (Prosperity or Recovery). వ్యాపార చక్రంలో ఒక దశ తర్వాత మరొక దశ ఏర్పడుతుంది. ఒక్కొక్క దశలో వినియోగదార్ల అభిరుచులు, అలవాట్లు, కొనుగోలు శక్తి, డిమాండ్ ధరలు, మార్కెట్ స్థితిగతులు వేరువేరుగా ఉంటాయి. కాబట్టి వ్యాపార నిర్ణయాలు తీసుకోవడంలో వ్యాపారవేత్త ఈ

చక్రీయ మార్పులను తప్పనిసరిగా అధ్యయనం చేయవలె. దీనివలన వ్యాపార కార్యక్రమం ఒకరీతిగా ఉండేటట్లు అవసరమైన చర్యలు తీసుకోవడానికి వీలవుతుంది. అయితే వ్యాపార చక్రాలలో కాలపరిమితి స్థిరంగా ఉండదు. అందువలన చక్రీయమార్పుల విశ్లేషణ సక్రమంగా జరగకపోవచ్చును.

5.5 క్రమ రహిత విచరణాలు (Irregular Variations) :

వీటిని అవ్యవస్థిత (Erratic), యాదృచ్ఛిక, ఆకస్మిక హెచ్చుతగ్గులు అని కూడా అంటారు. ఇంతకు ముందు చర్చించిన మూడు విచరణాలకు ఇవి భిన్నమైనవి. వ్యాపార ప్రక్రియలో అనుకోని సంఘటనల వలన ఏర్పడే మార్పులను క్రమరహిత విచరణాలు అంటారు. ఇవి ఊహకు అందనివి. ఇవి పునరావృతం కావచ్చును లేదా కాకపోవచ్చును. ఉదా:- యుద్ధాలు, సమ్మెలు, లాకౌట్‌లు, వరదలు, కరువు కాటకాలు, భూకంపాలు, విప్లవాలు, అంటువ్యాధులు మొదలైనవి - వీటిని ముందుగా ఊహించలేము. కాబట్టి వీటిని అంచనా వేయడానికి అవకాశం ఉండదు. ఇవి నిర్ణీత స్వరూపాలను కలిగి ఉండవు. కాని వీటి ప్రభావం స్వల్పకాలమైనా, చాలా తీవ్రంగా ఉండి, కొత్తరకపు చక్రీయ లేదా ఇతర విచరణాలకు దారితీయవచ్చు. అయితే కాలశ్రేణుల విశ్లేషణలో చక్రీయ విచరణాలను క్రమరహిత విచరణాలను విడదీయడం కూడా కష్టమే.

5.6 ప్రశ్నలు

1. కాలశ్రేణులలోని మార్పులను గురించి వివరంగా చర్చించండి.
2. దీర్ఘకాలిక ప్రవృత్తి అనగానేమి ?
3. ఋతు సంబంధ విచరణాల గురించి విశేషణాత్మకంగా వివరించండి.
4. చక్రీయ విచరణాలు అనగానేమి ?
5. క్రమరహిత విచరణాలు గురించి వివరించండి.

రచయిత

శ్రీ టి. నాగేశ్వరరావు

పాఠం 6 ప్రవృత్తి గణన (Measurement of Trend)

ఉద్దేశ్యం

ఈ పాఠ్యాంశం అధ్యయనం చేయడం వలన మీరు : -

* కాలశ్రేణులలో ప్రవృత్తిని కొలిచే వివిధ పద్ధతులను గురించి, వాటి ప్రయోజనాలను గురించి వివరంగా తెలుసుకొనగలరు.

పాఠ్య నిర్మాణ క్రమం

6.1 ప్రవృత్తిని కొలవడానికి కారణాలు

6.2 ప్రవృత్తిని కొలిచే వివిధ పద్ధతులు

6.3 సరస వక్రరేఖా పద్ధతి

6.4 అర్థ మాధ్యమాల పద్ధతి

6.5 భవిత మాధ్యమాల పద్ధతి

6.6 కనిష్ట వర్గాల పద్ధతి

6.7 ప్రశ్నలు

6.8 అభ్యాసాలు

6.1 ప్రవృత్తిని కొలవడానికి కారణాలు :

ప్రవృత్తి (Trend) ని కొలవడానికి రెండు ప్రధాన కారణాలున్నాయి.

(ఎ) ప్రవృత్తిని అధ్యయనం చేయడం

(బి) ప్రవృత్తిని తొలగించి విశ్లేషించడం

(ఎ) **ప్రవృత్తిని అధ్యయనం చేయడం :-** ప్రవృత్తిని కొలవడానికి ప్రధాన కారణం ప్రవృత్తి లక్షణాలను అధ్యయనం చేయడం. అనగా ప్రవృత్తి ఏ దిశలో మార్పు చెందుతుందో పరిశీలించడం.

(బి) **ప్రవృత్తి తొలగింపు మరియు విశ్లేషణ :-** రెండవ కారణం ప్రవృత్తిని తొలగించి కాలశ్రేణులను ప్రభావితం చేసే మిగతా అంశాలను విశ్లేషణ చేయడం.

6.2 ప్రవృత్తిని కొలిచే పద్ధతులు :

కాలశ్రేణులలోని ప్రవృత్తిని(Trend) అధ్యయనం చేయడానికి, కొలవడానికి (Measurement) సాధరణంగా క్రింది పద్ధతులను ఉపయోగిస్తారు.

(ఎ) సరస వక్రరేఖా పద్ధతి (Freehand Curve method)

(బి) అర్ధమాధ్యమాల పద్ధతి (Semi Average method)

(సి) భవిత మాధ్యమాల పద్ధతి (Moving Average method)

(డి) కనిష్ట వర్గాల పద్ధతి (Least Squares method)

6.3 సరస వక్రరేఖా పద్ధతి (Free Hand Curve Method) :

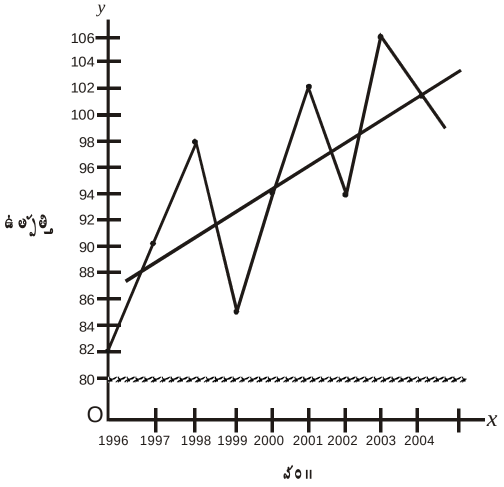
దీర్ఘకాలిక ప్రవృత్తిని అంచనా వేయడానికి ఇది సులభమైన, సరళమైన పద్ధతి. ఈ పద్ధతిలో కాలశ్రేణుల విలువలను కాగితం మీద బిందువులు గా గుర్తించి వక్రరేఖను గీయవలె. దీర్ఘకాలిక ప్రవృత్తికి ప్రాతినిధ్యం వహించే ఒక సరళరేఖను లేదా వక్రరేఖను అన్ని బిందువులు కలిసేటట్లుగా గీయవలె. ఈ ప్రక్రియ చేయడం వలన ఇతర అంశాలు అంటే ఋతు సంబంధ, చక్రీయ, క్రమరహిత హెచ్చుతగ్గులు తొలగించబడతాయి. దీనినే రేఖాపటాత్మక లేదా స్వేచ్ఛా రేఖానిర్మాణ పద్ధతి అని కూడా అంటారు.

ఉదాహరణ : 1 : క్రింది దత్తాంశానికి సరసరేఖా లేదా సరళరేఖ లేదా స్వేచ్ఛా రేఖాపద్ధతిలో ప్రకృతిరేఖ గీయండి.

సం॥	1996	1997	1998	1999	2000	2001	2002	2003	2004
ఉత్పత్తి	82	90	98	86	94	102	94	106	102

(లక్షల టన్నుల్లో)

జవాబు : - సరసరేఖా పద్ధతిలో ప్రవృత్తి



వివరణ : ప్రవృత్తి రేఖను బట్టి ప్రవృత్తి విలువలు పెరిగే ధోరణిలో వున్నాయని చెప్పవచ్చును.

ప్రయోజనాలు :

1. ఇది చాలా సులభమైన కాలాన్ని ఆదా చేసే పద్ధతి. దీనిలో ఎలాంటి గణితీయ గణనలు వుండవు.
2. అన్ని రకాల ప్రవృత్తులను వివరించేందుకు ఈ పద్ధతిని ఉపయోగించవచ్చును. ఉదా॥ సరళరేఖ, వక్రరేఖ
3. దత్తాంశాన్ని గ్రాఫ్ కాగితంపై బిందురూపంగా చూపగానే ప్రవృత్తికి సంబంధించిన గణితీయ నమూనాను స్థూలంగా అర్థం చేసుకొనవచ్చును.

లోపాలు :

1. దత్తాంశాన్ని ఉపయోగించే వ్యక్తి తనకు ఇష్టమైన రీతిలో మలచి తదనుగుణంగా రేఖను ప్రభావితం చేసి తన వ్యక్తిగత పక్షపాతాన్ని చూపడానికి వీలుంటుంది.
2. ప్రవృత్తి కొలవడానికి రేఖ ఉపయోగపడదు.
3. ఈ పద్ధతిలో వ్యక్తిగత పక్షపాత నిర్ణయాలకు వీలున్నందువలన అంచనాలు కట్టడానికి ఉపయోగకారిగా ఉండదు.

6.4 అర్థమధ్యమాల పద్ధతి (Semi Averages Method) :

'మధ్యమం' అనగా సగటు 'అర్థ' అనగా సగం (Half). 'అర్థమధ్యమం' అనగా సగం అంకెల సగటు అని అర్థం. అనగా దత్తాంశంలో మొదటి సగం అంకెలకు అంక మధ్యమం లెక్కించవలె. రెండవ సగం అంకెలకు అంక మధ్యమం లెక్కించవలె. (దత్తాంశంలో బేసి సంఖ్య ఉంటే, అందులోని మధ్యలో ఉన్న విలువను వదిలివేయవలె). ఈ రెండు అంక మధ్యమాల విలువలను గ్రాఫ్ కాగితంపై బిందువులుగా గుర్తించి, ఈ రెండు బిందువులను కలుపుతూ సరళరేఖ గీయవలె. దీనినే "ప్రవృత్తి రేఖ" అంటారు.

ఉదా : దత్తాంశంలో 6 సంవత్సరాల విలువలు ఇవ్వబడితే - అందులో మొదటి మూడు సంవత్సరాల విలువల యొక్క అంకమధ్యమం లెక్కించి 2వ సంవత్సరం విలువకు ఎదురుగా వ్రాయవలె. చివరి మూడు సంవత్సరాల విలువల యొక్క అంకమధ్యమం లెక్కించి 5వ సంవత్సరం విలువకు ఎదురుగా వ్రాయవలె. దత్తాంశంలో 7 సంవత్సరాల విలువలు ఇవ్వబడితే - అందులో నాల్గవ సంవత్సరం విలువను వదిలివేసి, మొదటి మూడు సంవత్సరాలకు అంకమధ్యమం (1, 2, 3 సంవత్సరాలకు) లెక్కించి 2వ సంవత్సరానికి ఎదురుగా వ్రాయవలె. చివరి 3 సంవత్సరాలకు (5, 6, 7 సంవత్సరాలకు) అంకమధ్యమం లెక్కించి 6వ సంవత్సరానికి ఎదురుగా వ్రాయవలె. రెండు అంకమధ్యమాల విలువలను గ్రాఫ్ కాగితంపై బిందువులుగా గుర్తించి, రెండు బిందువులను కలుపుతూ సరళరేఖ గీయవలె. అంచనా వేయవలసిన సంవత్సరం ఆధారంగా ఈ ప్రవృత్తి రేఖను పొడిగించి, భవిష్యత్కాలానికి విలువను అంచనా వేస్తారు.

ప్రయోజనాలు :

1. ఈ పద్ధతి అర్థం చేసుకోవడానికి తేలికగాను, గణించడానికి సులభంగాను ఉంటుంది.
2. ఇది చాలా హేతుబద్ధమైన పద్ధతి. ఇందులో ఎవరికైననూ ఒకే విలువలు లభిస్తాయి.
3. ఈ రేఖను రెండు వైపులా పొడిగించి భవిష్యత్ లేదా భూతకాలాలకు అంచనాలు వేయవచ్చు.

పరిమితులు :

1. ఈ పద్ధతి దత్తాంశములోని అంత్య విలువల మీద ఆధారపడి ఉంటుంది. కావున లెక్కించబడే అర్థమధ్యమాలు కూడా వాటి మీద ఆధారపడతాయి. అందుచేత ప్రవృత్తి రేఖ నిజమైన పెరుగుదల లేదా తగ్గుదలను సూచించదు.

2. కాలాన్ని రెండు సమాన భాగాలుగా వర్గీకరించడం వలన వ్యాపార చక్రాలు పూర్తి అయి ఉంటాయనే నమ్మకం లేదు. ముఖ్యంగా దత్తాంశకాలం మరీ తక్కువగా ఉంటే ఇలా అవుతుంది.

3. దత్తాంశములో సంవత్సరాలు బేసి సంఖ్యలో ఉన్నప్పుడు, సమభాగాలుగా చేయడానికి మధ్య సంవత్సరం వదిలివేయబడుతుంది. దాని వలన ఆ విలువ ప్రభావం ప్రవృత్తి రేఖలో కనుపించదు.

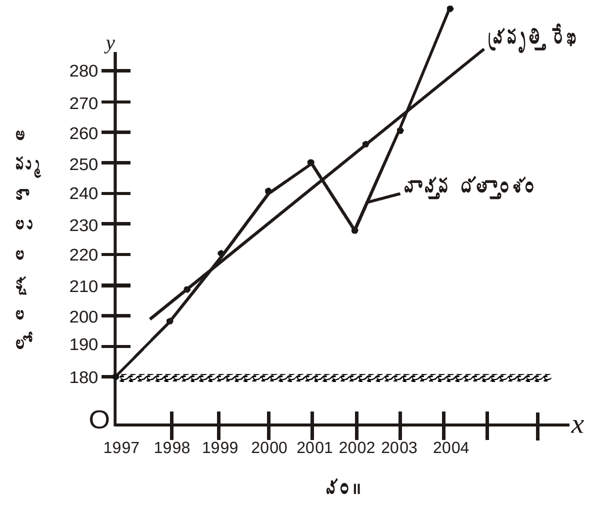
ఉదా : 2 ఒక కంపెనీ అమ్మకాలు ఇలా ఉన్నాయి.

సం॥	1997	1998	1999	2000	2001	2002	2003	2004
అమ్మకాలు (లక్షలలో)	180	200	220	240	250	230	260	280

అర్థమధ్యమాల పద్ధతి ద్వారా ప్రవృత్తి రేఖను గీయండి.

జవాబు :

సం॥	అమ్మకాలు	
1997	180	
1998	200	840 ÷ 4 = 210
1999	220	
2000	240	
2001	250	
2002	230	1020 ÷ 4 = 255
2003	260	
2004	280	



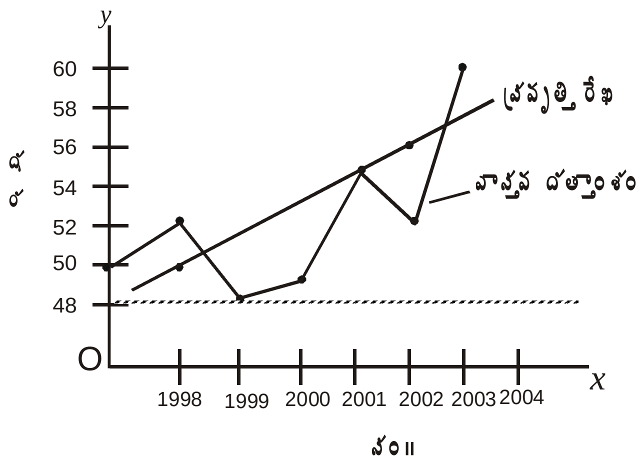
ఉదా - 3 : ఒక వస్తువు ధర 7 సంవత్సరాలలో ఇలా వుంది.

సం॥	1998	1999	2000	2001	2002	2003	2004
ధర(రూ॥)	50	52	48	49	55	53	60

అర్థమాధ్యమాల పద్ధతిలో ప్రవృత్తి రేఖను గీయండి.

జవాబు :

సం॥	ధర	
1998	50	
1999	52	150 ÷ 3 = 50
2000	48	
2001	49	ఈ విలువను వదిలివేయవలె.
2002	55	
2003	53	168 ÷ 3 = 56
2004	60	



6.5 చలిత మాధ్యమాల పద్ధతి (Moving Average Method) :

ఇది ప్రవృత్తులను కొలిచే సులభమైన, సరళమైన పద్ధతి. ఈ పద్ధతిలో దత్తాంశములోని ఋతు సంబంధ మరియు ఇతర స్వల్పకాలిక హెచ్చుతగ్గులు సగటుగా మార్చబడతాయి. దీని వలన ప్రవృత్తి (Trend) మాత్రమే స్పష్టమవుతుంది. ఈ విధంగా సగటు చేయడం వలన దత్తాంశంలోని ఒడి దుడుకులు, హెచ్చుతగ్గులు సరి అవుతాయి. చలిత మాధ్యమాన్ని లెక్కించడానికి ముందుగా చలిత మాధ్యమ కాలాన్ని నిర్ణయించవలె. ఆ కాలం 2 లేదా 3 లేదా 4 లేదా 5 లేదా 6 సంవత్సరాలు లేదా అంతకంటే ఎక్కువ కావచ్చును. ఎంపిక చేసిన కాలం కాలచక్రపు వ్యవధితో సరిపోవలె.

ఉదా : - 2 సంవత్సరాల కాలానికి చలిత మాధ్యమం లెక్కించే పద్ధతి ఇలా ఉంటుంది.

$$\frac{A+B}{2};\ \frac{B+C}{2};\ \frac{C+D}{2};\ \frac{D+E}{2};\ \frac{E+F}{2};\ \frac{F+G}{2}$$ = లభించిన విలువలను రెండింటి మధ్యగా చూపవలె.

3 సంవత్సరాల కాలానికి చలిత మాధ్యమం లెక్కించే పద్ధతి ఇలా వుంటుంది.

$$\frac{A+B+C}{3};\ \frac{B+C+D}{3};\ \frac{C+D+E}{3};\ \frac{D+E+F}{3};\ \frac{E+F+G}{3}$$ = లభించిన విలువలను రెండవ అంశానికి ఎదురుగా చూపవలె.

4 సంవత్సరాల కాలానికి చలిత మాధ్యమం లెక్కించే పద్ధతి ఇలా ఉంటుంది.

$$\frac{A+B+C+D}{4};\ \frac{B+C+D+E}{4};\ \frac{C+D+E+F}{4};\ \frac{D+E+F+G}{4}$$ = లభించిన విలువలను రెండవ మరియు మూడవ అంశాలకు మధ్యగా చూపవలె.

5 సంవత్సరాల కాలానికి చలిత మాధ్యమం లెక్కించే పద్ధతి ఇలా ఉంటుంది.

$$\frac{A+B+C+D+E}{5};\ \frac{B+C+D+E+F}{5};\ \frac{C+D+E+F+G}{5};\ \frac{D+E+F+G+H}{5}$$ = లభించిన విలువలను మూడవ అంశానికి ఎదురుగా చూపవలె.

అనగా ప్రతిసారీ మొదటి అంశాన్ని వదలివేసి, తదుపరి అంశాన్ని తీసుకొంటూ చివరి వరకు మాధ్యమాలు (సగటులు) లెక్కించవలె. 'చలిత' అనగా 'కదలుట', 'మాధ్యమం' అనగా 'సగటు' అంటే మాధ్యమం చలిత మౌతుంది కాబట్టి "దీనిని చలిత మాధ్యమం" అంటారు.

ఉదా - 4 : దిగువ దత్తాంశం నుంచి 2 సంవత్సరాల మరియు 3 సంవత్సరాల చలిత మాధ్యమాల కనుగొనండి.

సం॥	1995	1996	1997	1998	1999	2000	2001	2002	2003	2004
లాభాలు (కోట్లలో)	15	18	17	20	23	25	27	33	36	40

జవాబు : 2 సంవత్సరాల చలితమాధ్యమం గణన :

సం॥	లాభం(కోట్లలో)	2 సం॥ల మొత్తం	2 సం॥ల చలిత మాధ్యమం
1995	15		
		33	16.5 (33 ÷ 2)
1996	18		
		35	17.5 (35 ÷ 2)
1997	17		
	37	18.5 (37 ÷ 2)	

1998	20		
		43	21.5 (43 ÷ 2)
1999	23		
		48	24.0 (48 ÷ 2)
2000	25		
		52	26.0 (52 ÷ 2)
2001	27		
		60	30.0 (60 ÷ 2)
2002	33		
		69	34.5 (69 ÷ 2)
2003	36		
		70	38.0 (76 ÷ 2)
2004	40		

3 సంవత్సరాల చలితమాధ్యమం గణన :

సం॥	లాభం(కోట్ల రూ॥)	3 సం॥ల మొత్తం	3 సం॥ల చలిత మాధ్యమం	స్వల్పకాలిక హెచ్చుతగ్గులు
1995	15			
1996	18	50	16.67 (50 ÷ 3)	+1.33 (18 - 16.67)
1997	17	55	18.33 (55 ÷ 3)	-1.33 (17 - 18.33)
1998	20	60	20.00 (60 ÷ 3)	0 (20 - 20)
1999	23	68	22.67 (68 ÷ 3)	+0.33 (23 - 22.67)
2000	25	75	25.00 (75 ÷ 3)	0 (25 - 25)
2001	27	85	28.33 (85 ÷ 3)	-1.33 (27 - 28.33)
2002	33	96	32.00 (96 ÷ 3)	+1.00 (33 - 32)
2003	36	109	36.33 (109 ÷ 3)	- 0.33 (36 - 36.33)
2004	40			

ఉదా - 5 : క్రింది దత్తాంశము నుంచి 4 సం॥ల చలిత మాధ్యమాలు కనుగొని కేంద్రీకృత సగటులను గణన చేయండి.

సం॥	1995	1996	1997	1998	1999	2000	2001	2002	2003	2004
ఉత్పత్తి (మెట్రిక్ టన్నులు)	25	27	30	28	24	26	31	29	33	34

జవాబు : 4 సంవత్సరాల చలిత మాధ్యమం గణన :

సం॥	ఉత్పత్తి(మె॥టన్నుల్లో)	4 సం॥ల మొత్తం	4 సం॥ల చలిత మాధ్యమం (= ÷ 4)	2 కాలాల మొత్తం	కేంద్రీకృత సగటు (÷ 2)
1995	25				
1996	27				
		11	27.5	54.75	27.375
1997	30				
		109	27.25	54.75	27.375
1998	28				
		108	27.0	54.25	27.125
1999	24				
		109	27.25	54.75	27.375
2000	26				
		110	27.5	54.75	27.375
2001	31				
		119	29.75	57.25	28.625
2002	29				
		127	31.75	61.50	30.750
2003	33				
2004	34				

చలిత మధ్యమాల పద్ధతి ప్రయోజనాలు :

1. దీనిని అర్థం చేసుకోవడం, గణన చేయడం, అవగాహన చేసుకోవడం చాలా తేలిక.
2. ఈ పద్ధతి మార్పులకు అనుకూలమైనది (Flexible). దత్తాంశానికి అదనంగా కొన్ని పరిశీలనలు చేరిస్తే, కొన్ని అదనపు విలువలు లభిస్తాయి. అయితే ఈ అదనపు విలువల వలన అసలు విలువలలో మార్పేమీ ఉండదు.
3. ఋతు సంబంధ మార్పులు, చక్రీయ మార్పులు, క్రమరహిత మార్పులు అధ్యయనం చేయడానికి కూడా ఈ పద్ధతి ఉపయోగపడుతుంది.
4. దత్తాంశంలో ఎక్కువ విలువలు అంటే, యాధృచ్ఛిక మార్పులను కూడా తొలగించడం సాధ్యమవుతుంది.
5. దత్తాంశ స్వభావమును బట్టి చలిత మాధ్యమాల కాలం నిర్ణయించబడుతుంది. కాబట్టి వ్యక్తిగత పక్షపాత వైఖరికి అవకాశం ఉండదు.

పరిమితులు :

1. ఈ పద్ధతి ద్వారా భవిష్యత్ కాలానికి విలువలను అంచనా వేయుటకు కుదరదు.
2. దత్తాంశంలోని అన్ని విలువలకు ప్రవృత్తి లెక్కించుటకు కుదరదు. ఉదా. 3 సం॥ల చలిత మాధ్యమం లెక్కించినపుడు మొదటి మరియు చివరి సంవత్సరాలకు ప్రవృత్తి విలువలుండవు.
3. చలిత మాధ్యమ కాల నిర్ణయం గణాంక శాస్త్రజ్ఞుడి పరిశీలనపై ఆధారపడి వుంటుంది.
4. యాదృచ్ఛిక మార్పులను ఈ పద్ధతి పూర్తిగా తొలగించలేదు.
5. ఒక కాలచక్రగతి మారినపుడు ఈ పద్ధతి ఆశించిన ఫలితాలను సాధించలేదు.
6. దత్తాంశంలో చివరి విలువలు (Extreme Values) చలితమాధ్యమాలను ఎక్కువ ప్రభావితం చేస్తాయి.

6.6 కనిష్ట వర్గాల పద్ధతి (Least Squares Method) :

ప్రవృత్తి విలువలను కొలిచే పద్ధతులలో ఇది అత్యంత ప్రాముఖ్యమైనది. దీనిని "సుష్టతమ సామీప్య రేఖ"(Line of Best Fit) అని కూడా అంటారు. ఇది సులభంగాను, ఆచరణ యోగ్యంగాను ఉండి రేఖా నిర్మాణానికి వీలుగా ఉంటుంది. కనిష్ట వర్గాల పద్ధతిలో బీజీయ (Algebric) సూత్రాలను ఉపయోగించి ప్రవృత్తిని కనుగొనవచ్చును. ఈ పద్ధతి ద్వారా నిర్మించిన ప్రవృత్తి రేఖను 'శ్రేష్టమైన రేఖ' (Line of Best Fit) అంటారు. శ్రేష్టమైన రేఖకు రెండు వైపులా ఉన్న ధనాత్మక (+), ఋణాత్మక (-) విచలనాల మొత్తం 'సున్నా'కు సమానమవుతుంది. అనగా అసలు విలువలకు ప్రవృత్తి విలువలకు గల విచలనాల మొత్తం సున్నాకు సమానమవుతుంది. $\left[\sum(y-y_c)=0\right]$. అంతేకాక అసలు విలువ (y) మరియు ప్రవృత్తి విలువ (y_c)ల మధ్యగల విచలనాల వర్గాల మొత్తం $\sum(y-y_c)^2$ కనిష్టంగా ఉంటుంది. అందుచేతనే దీనిని "కనిష్ట వర్గాల పద్ధతి" అంటారు. కనిష్ట వర్గాల పద్ధతిలో సరళరేఖా ప్రవృత్తిని క్రింది సమీకరణం ద్వారా కనుగొంటారు.

ఇక్కడ $y_c = a + b\ dx$

y_c సరళరేఖా ప్రవృత్తి

a = y విలువల అంకమధ్యమం $\left(\frac{\sum y}{N}\right)$

b = మార్పురేటు లేదా ప్రవృత్తి రేఖ వాలు $\left(\frac{\sum dxy}{\sum dx^2}\right)$

dx = ఊహించిన సగటు నుంచి విచలనం.

$\sum dx = 0$ అయితే a, b ల విలువల కోసం పై సూత్రాలు ఉపయోగించవలె. అయితే $\sum dx \neq 0$ అయినచో a, b ల విలువలు లెక్కించడానికి క్రింది సమీకరణాలను ఉపయోగిస్తారు.

$$\sum y = Na + b\sum dx \quad \text{-----------} \quad (1)$$

$$\sum dx\,y = a\sum dx + b\sum dx^2 \text{ -----------(2)}$$

కనిష్ట వర్గాల పద్ధతిలో ప్రవృత్తి విలువలు గణించడానికి క్రింది పద్ధతిని అనుసరించవలె.

1. దత్తాంశములోని కాలాన్ని (సం॥ లేదా నెలలను) 'x' గాను, వాటి విలువలను 'y'గాను గుర్తించవలె. y విలువలు కూడితే $\sum y$ అవుతుంది.

2. ఊహించిన సగటును సంవత్సరాల నుండి తీసుకొనవలె. ఇచ్చిన సంవత్సరాలలో మధ్యలో ఉన్న సంవత్సరాన్ని ఊహించిన సగటు తీసుకోవలె. అనగా వాటి విచలనాలు కూడితే '0'తో సమానం అయ్యే విధంగా ఊహించిన సగటును తీసుకొనవలె ($\sum dx = 0$).

3. విచలనాలకు వర్గాలు $\left(dx \times dx = dx^2\right)$ లెక్కించవలె. వాటి మొత్తం $\sum dx^2$ అవుతుంది.

4. y విలువలకు విచలనాల విలువలను (dx) హెచ్చించి వాటిని కూడవలె. ($\sum dxy$)

5. a విలువ b విలువ కనుగొని వాటి ఆధారంగా సమీకరణ సాయంతో ప్రవృత్తి విలువలు $\left(y_c\right)$ లెక్కించవలె.

$$a = \frac{\sum y}{N}$$

$$b = \frac{\sum dx\,y}{\sum dx^2}$$

$$y_c = a + b\,dx$$

సుగుణాలు :

1. ఇది గణితీయ సూత్రం ఆధారంగా ప్రవృత్తి విలువలను లెక్కించే పద్ధతి. కాబట్టి చాలా హేయబద్ధమైనది.
2. ప్రవృత్తిని కనుగొనుటకు బీజీయ పద్ధతులను పాటించడం వలన గణాంకవేత్త పక్షపాత బుద్ధికి అవకాశం వుండదు.
3. ఇది చాలా ప్రాచుర్యం పొందిన, ఆదర్శమైన(Ideal), పద్ధతి. ఎందుచేతనంటే, అసలు విలువల నుంచి ప్రవృత్తి విలువలు తీసివేయగా వచ్చిన విచలనాల మొత్తం సున్నా అవుతుంది, విచలనాల వర్గాల మొత్తం కనిష్టంగా ఉంటుంది.
4. భవిష్యత్ గురించి అంచనా వేసేందుకు, ఇది చాలా ఉపయోగకరమైనది.
5. దత్తాంశంలోని అన్ని సంవత్సరాలకు ప్రవృత్తి లెక్కించవచ్చును.

లోపాలు :

1. దీనిని లెక్కించుట, అర్థం చేసుకొనుట చాలా కష్టమైనది.
2. దత్తాంశంలోని విలువల సంఖ్య తక్కువగా ఉన్నప్పుడు ఈ పద్ధతి ఆమోదయోగ్యంగా ఉండదు.
3. ఇచ్చిన దత్తాంశానికి మరికొన్ని అంశాలు చేర్చినట్లయితే ప్రవృత్తి సమీకరణంను తిరిగి లెక్కించవలె.

ఉదా - 6 : దిగుత దత్తాంశము నుంచి కనిష్ట వర్గాల పద్ధతిలో ప్రవృత్తిని కనుగొనండి. **2006**వ సం॥కి అమ్మకాలను అంచనా వేయండి.

సం॥	1999	2000	2001	2002	2003
అమ్మకాలు	70	74	80	86	90

(కోట్ల రూ॥లలో)

జవాబు : కనిష్ట వర్గాల పద్ధతిలో ప్రవృత్తిని గణన చేయడం.

సం॥	అమ్మకాలు	dx	dx^2	dxy	y_c
1999	70	-2	4	-140	69.6
2000	74	-1	1	-14	74.8
2001	80	0	0	0	80.0
2002	86	+1	1	+86	85.2
2003	90	+2	4	+180	90.4
N = 5	400	0	10	52	

$$a = \frac{\sum y}{N} = \frac{400}{5} = 80$$

$$b = \frac{\sum dx\,y}{\sum dx^2} = \frac{52}{10} = 5.2$$

$$y_c = a + b\,dx$$

1999 = 80 + 5.2(-2)

= 80 - 10.4 = 69.6

2000 = 80 + 5.2 (-1)

= 80 - 5.2 = 74.8

2001 = 80 + 5.2(0) = 80

2002 = 80 + 5.2(1)

= 80 + 5.2 = 85.2

2003 = 80 + 5.2(2)

= 80 + 10.4 = 90.4

2006 వ సంవత్సరానికి అంచనా :

$a = 80$

$b = 5.2$

dx = 2003 సం॥ = + 2

2004 సం॥ = +3

2005 సం॥ = +4

2006 సం॥ = +5

2003 = $a + b\ dx$

= 80 + 5.2(5)

= 80 + 26.0

= 106

సంవత్సరములు సరిసంఖ్యలు ఇచ్చినపుడు

ఉదా - 8 : క్రింది దత్తాంశము నుంచి కనిష్ట వర్గాల పద్ధతిలో సరళరేఖా ప్రవృత్తిని కనుగొనండి. **2008**వ సంవత్సరానికి విలువలను అంచనా వేయండి.

సం॥	1998	1999	2000	2001	2002	2003
విలువలు	83	92	71	90	169	191

జవాబు : సరళరేఖా పద్ధతిలో ప్రవృత్తి విలువలు లెక్కించడం.

x	y	dx	dx^2	dxy	y_c
1998	83	-2.5	6.25	-207.5	59.575
1999	92	-1.5	2.25	-138.0	82.145
2000	71	-0.5	0.25	-35.5	104.715
		0	0	0	
2001	90	+0.5	0.25	45.0	127.285
2002	169	+1.5	2.25	253.5	149.855
2003	191	+2.5	6.25	477.5	172.425
$N = 6$	696	0	17.5	395.0	

$$a = \frac{\sum y}{N} = \frac{696}{6} = 116$$

$$b = \frac{\sum dxy}{\sum dx^2} = \frac{395}{17.5} = 22.57$$

$$y_c = a + b\,dx$$

1998 = 116 + 22.57 (- 2.5)

= 116 - 56.425 = 59.575

1999 = 116 + 22.57 (-1.5)

= 116 - 33.855 = 82.145

2000 = 116 + 22.57 (-0.5)

= 116 - 11.285 = 104.715

2001 = 116 + 22.57 (0.5)

= 116 + 11.285 = 127.285

2002 = 116 + 22.57 (1.5)

= 116 + 33.855 = 149.855

2003 = 116 + 22.57 (2.5)

= 116 + 56.425 = 172.425

2008కి అంచనా : a = **116**

b = 22.57

dx = 2003కు 2.5

2004కు 3.5

2005కు 4.5

2006కు 5.5

2007కు 6.5

2008కు 7.5

2008కి అంచనా : = 116 + 22.57 (7.5)

= 116 + 169.275 = 285.275

గమనిక : 0.5 ; 1.5 ; 2.5 అనే బదులుగా వాటిని 2 చేత హెచ్చించి సాధారణ అంకెలుగా అనగా 0.5 బదులుగా 1; 1.5 బదులుగా 3; 2.5 బదులుగా 5 అని మార్చుకొనవచ్చును.

x	y	dx	dx^2	dxy	y_c
1998	83	-5	25	-415	59.57
1999	92	-3	9	-276	82.14
2000	71	-1	1	-71	104.71
		0	0		
2001	90	+1	1	+90	127.285
2002	169	+3	9	+507	149.85
2003	191	+5	25	+955	172.42
N = 6	696	0	70	790	

$$a=\frac{\sum y}{N}=\frac{696}{6}=116$$

$$b=\frac{\sum dxy}{\sum dx^2}=\frac{790}{70}=11.2857$$

$$y_c=a+b\,dx$$

1998 = 116 + 11.2857 (-5)

= 116 - 56.4286 = 59.571

1999 = 116 + 11.2857 (-3)

= 116 - 33.8571 = 82.14

2000 = 116 + 11.2857 (-1)

= 116 - 11.2857 = 104.71

2001 = 116 + 11.2857 (1)

= 116 + 11.2857 = 127.2857

2002 = 116 + 11.2857 (5)

= 116 + 56.4286 = 172.4286

2008కి అంచనా : a = 116

b = 11.2857

dx = 2003కు 5

2004కు 7

2005కు 9

2006కు 11

2007కు 13

2008కు 15

2008కి అంచనా = 116 + 11.2857 (15)

= 116 + 169.2855 = 285.275

ఉదా - 9 : కనిష్ట వర్గాల పద్ధతిలో సరళ రేఖా ప్రవృత్తిని కనుగొనండి.

సం॥	1928	1938	1948	1958	1968	1978	1988	1998
హర్యానా రాష్ట్ర జనాభా (మి॥లలో)	3.9	5.3	7.3	9.6	12.9	17.1	22.2	30.5

హర్యానా రాష్ట్ర జనాభాను 2003కు అంచనా వేయండి.

x	y	dx	dx^2	dxy	y_c
1928	3.9	-7	49	-27.3	0.93
1938	5.3	-5	25	-26.5	4.55
1948	7.3	-3	9	-21.9	8.17
1958	9.6	-1	1	-9.6	11.79
		0			
1968	12.9	+1	1	+12.9	15.41
1978	17.1	+3	9	+51.3	19.03
1988	22.2	+5	25	+111.0	22.65
1998	30.5	+7	49	+213.5	26.27
N = 8	108.8	0	168	303.4	

$$a = \frac{\sum y}{N} = \frac{108.8}{8} = 13.6$$

$$b = \frac{\sum dxy}{\sum dx^2} = \frac{303.4}{168} = 1.81$$

$$y_c = a + b\ dx$$

1928 = 13.6 + 1.81 (-7)

= 13.6 - 12.67 = 0.93

1938 = 13.6 + 1.81 (-5)

= 13.6 - 9.05 = 4.55

1948 = 13.6 + 1.81 (-3)

= 13.6 - 5.43 = 8.17

1958 = 13.6 + 1.81 (-1)

= 13.6 - 1.81 = 11.79

1968 = 13.6 + 1.81 (1)

= 13.6 + 1.81 = 15.41

1978 = 13.6 + 1.81 (3)

= 13.6 + 5.43 = 19.03

1988 = 13.6 + 1.81 (5)

= 13.6 + 9.05 = 22.65

1998 = 13.6 + 1.81 (7)

= 13.6 + 12.67 = 26.27

2003కు అంచనా : a = 13.6

b = 1.81

dx = 1998కు = +7

2008కు = +9

2003కు = +8 (7 మరియు 9ల మధ్యవిలువ)

2003కు అంచనా : 13.6 + 1.81 (8)

13.6 + 14.48 = 28.08

ఉదా - 10 : క్రింది దత్తాంశానికి కనిష్ట వర్గాల పద్ధతిలో సరళరేఖా ప్రవృత్తిని కనుగొనండి.

సం॥	1991	1993	1995	1997	1999	2001	2003
ఉత్పత్తి	25	27	32	36	44	55	69

2004వ సంవత్సరానికి ఉత్పత్తిని అంచనా వేయండి.

జవాబు : కనిష్ట వర్గాల పద్ధతిలో ప్రవృత్తి గణన : -

x	y	dx	dx^2	dxy	y_c
1991	25	-3	9	-75	19.72

1993	27	-2	4	-54	26.86
1995	32	-1	1	-32	34.00
1997	36	0	0	0	41.14
1999	44	+1	1	44	48.28
2001	55	+2	4	110	55.42
2003	69	+3	9	207	62.56
N = 7	288	0	28	200	

$$a=\frac{\sum y}{N}=\frac{288}{7}=41.14$$

$$b=\frac{\sum dxy}{\sum dx^2}=\frac{200}{28}=71.4$$

$$y_c = a + b\,dx$$

1991 = 41.14 + 7.14 (-3)

= 41.14 - 21.42 = 19.72

1993 = 41.14 + 71.4 (-2)

= 41.14 - 14.28 = 26.86

1995 = 41.14 + 7.14(-1)

= 41.14 - 7.14 = 34.00

1997 = 41.14 + 7.14 (0)

= 41.14 + 0 = 41.14

1999 = 41.14 + 7.14 (1)

= 41.14 + 7.14 = 48.28

2001 = 41.14 + 7.14 (2)

= 41.14 + 14.28 = 55.42

2003 = 41.4 + 7.14 (3)

= 41.14 + 21.42 = 62.56

2004కు అంచనా : a = 4.14

b = 7.14

dx = 2003కు 3

= 2005కు 4

= 2004కు 3.5 (3కు 4కు మధ్య విలువ)

2004కు అంచనా : $a + b\,dx$

$= 41.14 + 7.14\ (3.5)$

$= 41.74 + 24.99 = 66.13$

ఉదా - 11 : కనిష్ట వర్గాల పద్ధతిలో సరళరేఖా ప్రవృత్తిని కనుగొనండి.

సం॥	1989	1991	1992	1993	1994	1995	1998
అమ్మకాలు	140	144	160	152	168	176	180

1996వ సంవత్సరానికి అంచనా వేయండి.

జవాబు :

x	y	dx	dx^2	dxy	y_c
1989	140	-4	16	-560	139.45
1991	144	-2	4	-288	149.37
1992	160	-1	1	-160	154.33
1993	152	0	0	0	159.29
1994	168	+1	1	+168	164.25
1995	176	+2	4	+352	169.21
1998	180	+5	25	+900	184.09
13952	1120	1	51	412	

ఇక్కడ ఇవ్వబడిన దత్తాంశంలో 1990 మరియు 1996, 1997 యొక్క విలువలు లేవు. ఊహించిన సగటుగా ఏ సం॥ తీసుకున్నను $\sum dx = 0$ తో సమానం కాదు. అందుచేత ఇచ్చిన సంవత్సరాల యొక్క సగటును ఊహించిన సగటుగా తీసుకొనవలె.

$$\frac{13952}{7} = 1993$$

అనగా 1993ను ఆధారంగా తీసుకొనవలె.

$\sum dx \neq 0$ అయినందున ($\sum dx$ not equal to zero) a, b ల విలువలు క్రింది సమీకరణాల ద్వారా సాధించవలె.

$\sum y = Na + b \sum dx$ ------------ (1)

$\sum dxy = \sum dx.a + b.\sum dx^2$ ------ (2)

$1120 = 7a + b1$ ---------------- (1)

$412 = 1a + b\ 51$ --------------- (2)

లేదా

$7a + b = 1120$ ----------------- (1)

$a + 51b = 412$ ----------------- (2)

లేదా

$7a + \quad b = 1120$ ----------------- (1)

$-7a + 357b = 2884$ ----------------- (2)

$356b = 1764$

$$b = \frac{1764}{356} = 4.96$$

b విలువను (1)వ సమీకరణంలో ప్రతిక్షేపించగా

$7a + 4.96(1) = 1120$

$7a + 4.96 = 1120$

$7a = 1120 - 4.96$

$7a = 1115.04$

$$a = \frac{1115.04}{7}$$

$a = 159.29$

$y_c = a + b\,dx$

1989 = 159.29 + 4.96(-4)

= 159.29 - 19.84 = 139.45

1991 = 159.29 + 4.96(-2)

= 159.29 - 9.92 = 149.37

1992 = 159.29 + 4.96(-1)

= 159.29 - 4.96 = 154.33

1993 = 159.29 + 4.96(0) = 159.29

1994 = 159.29 + 4.96(1)

= 159.29 + 4.96 = 164.25

1995 = 159.29 + 4.96(2)

= 159.29 + 9.92 = 169.21

1998 = 159.29 + 4.96 (5)

= 159.29 + 24.8 = 184.09

1996వ సంవత్సరానికి అంచనా :

a = 159.29

b = 4.96

dx = 1995కు = 2

1996కు = 3

1996 = 159.29 + 4.96(3)

= 159.29 + 14.88 = 174.17

ఉదా - 12 : చక్కెర పరిశ్రమలో ఉత్పత్తి వివరాలు మిలియన్ టన్నులలో ఇలా వుంది.

సం॥	1992	1993	1994	1995	1996	1997	1998
ఉత్పత్తి (మి॥టు॥)	12	10	14	11	13	15	16

పై దత్తాంశము నుంచి ఆధార సం॥ మార్చి కనిష్ట వర్గాల పద్ధతిలో సరళరేఖా ప్రవృత్తిని కనుగొనండి. 1999 మరియు 2001 సంవత్సరాలకు ఉత్పత్తి అంచనా వేయండి..

జవాబు : సంవత్సరాలు బేసి సంఖ్య(7)గా ఇవ్వబడినాయి. మధ్య సంవత్సరాన్ని, 1995ను, ఆధారంగా చేసుకొంటే $\sum dx$ సున్నాతో సమానమవుతుంది. అయితే ఆధార సంవత్సరం మార్చమని ఇవ్వబడింది. కాబట్టీ, 1995కు బదులుగా 1991ను ఆధారంగా తీసుకుని a మరియు b విలువలను సమీకరణాల పద్ధతి ద్వారా కనుగొనవలె.

x	y	dx	dx^2	dxy	y_c
1992	12	+1	1	12	10.75
1993	10	+2	4	20	11.50
1994	14	+3	9	42	12.25
1995	11	+4	16	44	13.00
1996	13	+5	25	65	13.75
1997	15	+6	36	90	14.50
1998	16	+7	49	112	15.25
$N = 7$	91	28	140	385	

ఆధార సంవత్సరము : 1991

$\sum y = Na + b\sum dx$ ---------------- (1)

$\sum dxy = a\sum dx + b\sum dx^2$ -----------(2)

$91 = 7a + 28b$ ---------- (1)

$385 = 28a + 140b$ --------- (2)

$7a + 28b = 91$-------- (1) $(\times 4)$

$28a + 140b = 385$-------- (2)

Or

$28a + 112b = 364$ ---------- (1)

$28a + 140b = 385$ ---------- (2)

$28b = 21$

$b = \frac{21}{28}$

$b = 0.75$

b విలువను 1వ సమీకరణంలో ప్రతిక్షేపించగా

$7a + 28(0.75) = 91$

$7a + 21 = 91$

$7a = 91 - 21$

$7a = 70$

$a = \frac{70}{7}$

$a = 10$

$a = 10,\ b = 0.75$

$y_c = a + b\,dx$

1992 = 10 + 0.75(1)

= 10 + 0.75 = 10.75

1993 = 10 + 0.75(2)

= 10 + 1.50 = 11.50

1994 = 10 + 0.75(3)

= 10 + 2.25 = 12.25

1995 = 10 + 0.75(4)

= 10 + 3.00 = 13.00

1996 = 10 + 0.75 (5)

= 10 + 3.75 = 13.75

1997 = 10 + 0.75(6)

= 10 + 4.50(7) = 14.50

1998 = 10 + 0.75(7)

= 10 + 5.25 = 15.25

1999 మరియు 2001కి అంచనా : a = 10

b = 0.75

dx = 1998 = 7

1999 = 8

2000 = 9

2001 = 10

1999 = 10 + 0.75(8)

= 10 + 6.00 = 16.00

2001 = 10 + 0.75 (10)

10 + 7.50 = 17.50

ఉదా - 13 : ఒక దుకాణంలో వార్షిక అమ్మకాలు ఇలా ఉన్నాయి.

సం॥	1998	1999	2000	2001	2002	2003	2004
అమ్మకాలు (వేలల్లో)	120	130	135	125	145	150	140

పై దత్తాంశం నుంచి
1) కనిష్ట వర్గాల పద్ధతిలో సరళరేఖా ప్రవృత్తి విలువను గణన చేయండి.
2) అమ్మకాలు నెలసరి పెరుగుదలను కనుగొనండి.
3) సంకలన మరియు గుణకార పద్ధతులలో ప్రవృత్తి విలువలను తొలగించండి.

జవాబు : (1)

x	y	dx	dx^2	dxy	y_c
1998	120	-3	9	-360	123.21
1999	130	-2	4	-260	127.14
2000	135	-1	1	-135	131.07
2001	125	0	0	0	135.00
2002	145	+1	1	+145	138.93
2003	150	+2	4	+300	142.86
2004	140	+3	9	+420	146.79
N =7	945	0	28	110	

$$a = \frac{\sum y}{N} = \frac{945}{7} = 135$$

$$b = \frac{\sum dxy}{\sum dx^2} = \frac{110}{28} = 3.93$$

$$y_c = a + b\,dx$$

1998 = 135 + 393(-3)

= 135 - 11.79 = 123.21

1999 = 135 + 3.93 (-2)

= 135 - 7.86 = 127.14

2000 = 135 + 3.93 (-1)

= 135 - 3.93 = 131.07

2001 = 135 + 3.93(0)=135.00

2002 = 135 + 3.93(1)

= 135 + 3.93 = 138.93

2003 = 135 + 3.93(2)

= 135 + 7.86 = 142.86

2004 = 135 + 3.93(3)

= 135 + 11.79 = 146.79

(2) వార్షిక పెరుగుదల రూ. 3.93 వేలు (రెండు y_cల మధ్య వ్యత్యాసము)

వార్షిక పెరుగుదల రూపాయలలో 3.93 × 1000 = 3930

1 నెలకు పెరుగుదల = $\frac{3930}{12} = 327.5$

(3) ప్రవృత్తి విలువల తొలగింపు :

సంకలన పద్ధతి (Additive Method) ($y - y_c$)

$\sum(y - y_c) = 0$ సున్నాతో సమానం అవుతుంది.

1998	=	120 - 123.21	=	- 3.21
1999	=	130 - 127.14	=	+ 2.86
2000	=	135 - 131.07	=	+ 3.93
2001	=	125 - 135.00	=	- 10.00
2002	=	145 - 138.93	=	+ 6.07
2003	=	150 - 142.86	=	+ 7.14
2004	=	140 - 146.79	=	- 6.79
		$\sum(y - y_c)$	=	0

గుణకార పద్ధతి (Multiplication Method**) :** $\frac{y}{y_c}$

$$\sum\left(\frac{y}{y_c}\right) = N$$

$$1998 = \frac{120}{123.21} = 0.97$$

$$1999 = \frac{130}{127.14} = 1.02$$

$$2000 = \frac{135}{131.07} = 1.03$$

$$2001 = \frac{125}{135} = 0.93$$

$$2002 = \frac{145}{138.93} = 1.04$$

$$2003 = \frac{150}{142.86} = 1.05$$

$$2004 = \frac{140}{146.79} = 0.95$$

$$\sum\left(\frac{y}{y_c}\right) = 7.00$$

6.7 ప్రశ్నలు :

1. ప్రవృత్తిని కొలిచే పద్ధతులు వివరించండి.
2. సరస వక్రరేఖా పద్ధతి గురించి వివరించండి.
3. అర్ధమాధ్యమాల పద్ధతిని చర్చించండి.
4. చలిత మాధ్యమాల పద్ధతి గురించి వివరించండి.
5. కనిష్ట వర్గాల పద్ధతి గురించి వివరించండి.

6.8 అభ్యాసాలు :

1. క్రింది దత్తాంశం నుంచి సరస వక్రరేఖా పద్ధతి ద్వారా ప్రవృత్తి రేఖను చూపండి.

సం॥	1997	1998	1999	2000	2001	2002	2003	2004
ఉత్పత్తి	116	144	206	214	224	240	260	294

2. అర్ధమాధ్యమాల పద్ధతిలో ప్రవృత్తి రేఖను నిర్మించండి.

సం॥	1995	1996	1997	1998	1999	2000	2001
అమ్మకాలు (లక్షల్లో)	5.0	5.7	6.1	5.8	6.2	6.5	7.2

3. క్రింది దత్తాంశం నుంచి అర్ధమాధ్యమాల పద్ధతిలో ప్రవృత్తి రేఖను నిర్మించండి.

సం॥	1995	1996	1997	1998	1999	2000	2001	2002
ఉత్పత్తి (కోట్లలో)	200	214	224	260	250	294	312	340

4. అర్ధమాధ్యమాల పద్ధతిలో ప్రవృత్తి రేఖను నిర్మించండి.

సం॥	1995	1996	1997	1998	1999	2000	2001	2002
ఉత్పత్తి	275	290	310	425	470	540	600	620

5. పాక్షిక సగటుల పద్ధతిలో క్రింది దత్తాంశానికి ప్రవృత్తి రేఖను నిర్మించండి.

సం॥	1998	1999	2000	2001	2002	2003
అమ్మకాలు (వేలల్లో)	100	150	200	180	200	240

6. క్రింది దత్తాంశం నుంచి 2 సంవత్సరాల మరియు 3 సంవత్సరాల చలిత మాధ్యము లెక్కించండి.

సం॥	1994	1995	1996	1997	1998	1999	2000	2001	2002	2003
అమ్మకాలు (లక్షలలో)	115	119	125	135	160	179	216	233	275	333

7. దిగువ దత్తాంశము నుంచి 3 సం॥ల చలిత మాధ్యమం కనుగొనండి. స్వల్పకాలిక హెచ్చు తగ్గులు కూడా కనుగొనండి.

సం॥	1993	1994	1995	1996	1997	1998	1999	2000	2001	2002	2003	2004
ధర	16	19	21	22	23	25	24	22	26	26	27	26

8. 3 సం॥ల చలిత మాధ్యమం, స్వల్పకాలిక హెచ్చుతగ్గులు కనుగొనండి.

సం॥	1993	1994	1995	1996	1997	1998	1999	2000	2001	2002	2003	2004
అమ్మకాలు	76	80	85	91	113	125	112	121	133	155	140	167

9. 3 సంవత్సరాల మరియు 5 సంవత్సరాల చలిత మాధ్యమం కనుగొనండి.

సం॥	1991	1992	1993	1994	1995	1996	1997	1998	1999	2000	2001	2002
ధరలు	112	115	120	118	121	120	124	126	130	128	131	136

10. 3 మరియు 4 సంవత్సరాల చలిత మాధ్యమాలు కనుగొనండి. 4 సం॥ల చలిత మాధ్యమానికి కేంద్రీకృత సగటును కనుగొనండి.

సం॥	1993	1994	1995	1996	1997	1998	1999	2000	2001	2002	2003	2004
అమ్మకాలు	32	38	42	44	46	60	48	44	53	62	54	62

11. 4 సంవత్సరాల చలిత మాధ్యమాన్ని కేంద్రీకృత సగటును కనుగొనండి.

సం॥	1993	1994	1995	1996	1997	1998	1999	2000	2001	2002	2003	2004
ధర	73	74	72	78	81	84	80	87	90	103	113	117

12. క్రింది దత్తాంశం నుంచి కనిష్ట వర్గాల పద్ధతిలో ప్రవృత్తి విలువను కనుగొని, 2006వ సం॥కి లాభం అంచనా వేయండి.

సం॥	1998	1999	2000	2001	2002	2003	2004
లాభాలు (లక్షలలో)	60	72	75	65	80	85	95

13. కనిష్ట వర్గాల పద్ధతిలో ప్రవృత్తిని కనుగొనండి. 2008కి అమ్మకాలు అంచనా వేయండి.

సం॥	2000	2001	2002	2003	2004
అమ్మకాలు (కోట్లలో)	12	18	20	23	27

14. కనిష్ట వర్గాల పద్ధతిలో సరళరేఖా ప్రవృత్తిని కనుగొనండి. 2005వ సం॥కి లాభం అంచనా వేయండి.

సం॥	1998	1999	2000	2001	2002	2003	2004
లాభాలు	120	144	150	130	160	170	190

15. కనిష్ట వర్గాల పద్ధతిలో ప్రవృత్తి విలువను కనుగొని 2008వ సంవత్సరానికి, 1996కు విలువ అంచనా వేయండి.

సం॥	2000	2001	2002	2003	2004
విలువ	38	38	46	40	56

16. క్రింది వివరాల నుంచి కనిష్ట వర్గాల పద్ధతిలో ప్రవృత్తి విలువను కనుగొనండి.

సం॥	1998	1999	2000	2001	2002	2003	2004
విలువ	100	120	110	140	80	95	115

2007కు విలువ అంచనా వేయండి.

17. కనిష్ట వర్గాల పద్ధతిలో సరళరేఖా ప్రవృత్తిని కనుగొని, 2004కు, 1990కి ధరలు అంచనా వేయండి.

సం॥	1993	1994	1995	1996	1997	1998	1999	2000
ధరలు	38	40	65	72	69	60	87	95

18. క్రింది వివరాల నుంచి కనిష్ట వర్గాల పద్ధతిలో సరళరేఖా ప్రవృత్తిని కనుగొనండి.

సం॥	1998	1999	2000	2001	2002	2003
విలువలు	27	30	35	40	44	45

2005వ సంవత్సరపు విలువలు అంచనా వేయండి.

19. కనిష్ట వర్గాల పద్ధతిలో సరళరేఖా ప్రవృత్తిని కనుగొనండి.

సం॥	1966	1968	1969	1970	1971	1972	1975
ఉత్పత్తి	77	88	94	85	91	98	90

1974వ సంవత్సరపు విలువ అంచనా వేయండి.

20. కనిష్ట వర్గాల పద్ధతిలో సరళరేఖా ప్రవృత్తిని కనుగొనండి. 2003కు ధర అంచనా వేయండి.

సం॥	1990	1992	1995	1996	1997	1999	2000
ధర	25	32	40	37	44	50	57

21. క్రింది దత్తాంశము నుంచి కనిష్ట వర్గాల పద్ధతిలో సరళరేఖా ప్రవృత్తిని కనుగొనండి. 1992కు జనాభా అంచనా వేయండి.

సం॥	1980	1981	1984	1985	1987	1988	1989
జనాభా	2.5	2.9	3.2	3.0	4.7	5.4	6.3

22. క్రింది దత్తాంశం నుంచి కనిష్ట వర్గాల పద్ధతిలో సరళరేఖా ప్రవృత్తిని కనుగొనండి. నెలసరి ఉత్పత్తి పెరుగుదలను కనుగొనండి. సంకలన మరియు గుణకార పద్ధతులలో ప్రవృత్తి విలువలు తొలగించండి.

సం॥	1997	1998	1999	2000	2001	2002	2003
ఉత్పత్తి ('000' టన్నులలో)	360	390	405	375	435	450	420

23. క్రింది దత్తాంశం నుంచి సరళరేఖా ప్రవృత్తిని కనిష్ట వర్గాల పద్ధతిలో కనుగొనండి.

సం॥	1992	1993	1994	1995	1996	1997	1998	1999	2000
విలువలు	380	400	650	720	690	620	670	950	1040

సంకలన మరియు గుణకార పద్ధతులలో ప్రవృత్తి విలువలు తొలగించండి.

24. కనిష్ట వర్గాల పద్ధతిలో సరళరేఖా ప్రవృత్తి విలువను కనుగొని $\sum(y-y_c)=0$ అని ఋజువు చేయండి.

సం॥	2000	2001	2002	2003
అమ్మకాలు ('000')	10	13	15	12

25. క్రింది దత్తాంశం నుంచి కనిష్ట వర్గాల పద్ధతిలో సరళ రేఖా ప్రవృత్తిని, విలువను కనుగొనండి. ప్రవృత్తి విలువను పట్టీలో చూపండి. ఆ విలువలను రేఖాచిత్రంలో చూపండి.

చక్కెర కంపెనీ ఉత్పత్తి వివరాలు :

సం॥	1981	1982	1983	1984	1985	1986	1987
ఉత్పత్తి ('000' టన్నులలో)	80	90	92	83	94	99	92

1989కి ఉత్పత్తిని అంచనా వేయండి. ఉత్పత్తి యొక్క నెలసరి పెరుగుదల ఎంత ?

రచయిత

శ్రీ టి. నాగేశ్వరరావు

పాఠం 7

కాలశ్రేణులు

ఋతుసంబంధ విచరణాలు - ఋతు ప్రభావాలను తొలగించడం

(Seasonal Variations - Deseasonalisation)

ఉద్దేశ్యం

ఈ పాఠ్యంశం అధ్యయనం చేయడం వలన మీరు :-

* ఋతు సంబంధ విచరణాలు గురించి, వాటిని కొలిచే వివిధ పద్ధతులను గురించి, వివరంగా తెలుసుకొనగలరు.

పాఠ్య నిర్మాణ క్రమం

7.1 విషయ పరిచయం

7.2 ఋతుసంబంధ సూచీలు

7.3 ఋతు సంబంధ విచరణాలను కొలిచే పద్ధతులు

7.4 సామాన్య సగటు పద్ధతి

7.5 ప్రవృత్తి, నిష్పత్తి పద్ధతి

7.6 చలిత మాధ్యమాల నిష్పత్తి పద్ధతి

7.7 లింక్ సాపేక్షాల పద్ధతి

7.8 ఋతు ప్రభావాలను తొలగించడం

7.9 ఋతు సంబంధ సూచీ వలన ప్రయోజనాలు, నష్టాలు

7.10 ప్రశ్నలు

7.11 అభ్యాసాలు

విషయ పరిచయం :

ఋతు సంబంధ విచరణాలకు సంబంధించిన విషయాలు, పరిజ్ఞానం, గణాంక వేత్తకు ఎంతో అవసరం. కొనుగోళ్ళు, అమ్మకాలు, మెటీరియల్ నియంత్రణ, కార్మికుల హాజరు మొదలైన విషయాలకు సంబంధించిన చాలా వరకు వ్యాపారపు నిర్ణయాలు ఋతుసంబంధ విచరణకు ప్రభావితమౌతాయి. అనగా వీటికి సంబంధించిన విధాన నిర్ణయాలు తీసుకోవడానికి ఋతు సంబంధ పరిజ్ఞానం చాలా అవసరం.

ఋతు సంబంధ విచరణను కొలవడానికి రెండు ప్రధాన కారణాలున్నాయి.

1. కాలశ్రేణులలో ఋతుపవన మార్పుల ప్రభావంను తెలుసుకోవడం.

2. కాలశ్రేణులలో ఋతు పవన మార్పులను తొలగించడం, తద్వారా దీర్ఘకాలమునకు సంబంధించిన అంశాలను, ఋతుపవన రహితమైన పరిణామాలు అంచనా వేయడం.

7.2 ఋతు సంబంధ లేదా ఋతుపవన సూచీలు : ఋతు పవన విచలనాల కొలమానాలను ఋతు సంబంధ సూచీలు అంటారు. వీటిని పరమ విలువల (Absolute Values) రూపంలోగాని, సాపేక్ష విలువల రూపంలోగాని (Relative Values) చెప్పవచ్చు. పరమ విలువల రూపంలో అయితే సంకలన పద్ధతిలో (కూడిక) (Additive Model) అనగా $S=Y(T+C+I)$ అని చెబుతారు. ఇక్కడ

S అనగా ఋతు సంబంధ లేదా ఋతుపవన విచలనాలు అని అర్థం

Y అనగా చలరాశి విలువ అని అర్థం

T అనగా ప్రవృత్తి విలువ అని అర్థం

C అనగా చక్రీయ మార్పులు అని అర్థం

I అనగా క్రమరహిత మార్పులు అని అర్థం

సాపేక్ష విలువల రూపంలో అయితే ఋతుపవన సూచీలను గుణకార పద్ధతిలో (Multiplicative Model) మిగిలిన అంశాల శాతాలుగా చెప్పవచ్చు. అనగా $S=\frac{TSCI}{TCI}\times 100$ లేదా $\frac{Y}{TCI}$.

7.3 ఋతు సంబంధ విచరణాలను కొలిచే పద్ధతులు :

ఋతు సంబంధ విచరణాలను కొలవడానికి అనేక పద్ధతులున్నాయి. అందులో ముఖ్యమైనవి ఇవి :

(ఎ) సామాన్య సగటు పద్ధతి (Simple average method)

(బి) ప్రవృత్తి - నిష్పత్తి పద్ధతి (Method of Ratio to Trend)

(సి) చలిత మాధ్యమాల - నిష్పత్తి పద్ధతి (Method of Ratio to Moving Average)

(డి) లింక్ సాపేక్షాల పద్ధతి (Method of Link Relatives)

7.4 సామాన్య సగటు పద్ధతి (Method of Simple Average) :

ఋతుసంబంధ విచరణాలను కొలిచే పద్ధతులలో ఇది చాలా తేలికైనది. ఈ పద్ధతిలో ఒక ఋతువునకు సంబంధించిన సూచీని ఈ విధంగా లెక్కిస్తారు.

$$\text{ఋతుపవన సూచీ} = \frac{\text{ఒక ఋతువు యొక్క సగటు}}{\text{వార్షిక సగటు}}$$

ఇక్కడ ఒక ఋతువు అనగా - ఒక నిర్దిష్ట కాలానికి అనగా నెల, త్రైమాసికం, వారం, రోజు, ఏదైనా కావచ్చును. - అలాంటి నిర్దిష్ట కాలపు సగటును ఋతువు యొక్క సగటు అంటారు.

వార్షికం అనగా సంవత్సరం. సంవత్సరంలో అన్ని ఋతువుల (అనగా 4 త్రైమాసికాల లేదా 12 నెలల లేదా 52 వారాల లేదా 365 రోజుల) సగటు యొక్క సగటును వార్షిక సగటు అంటారు.

ఉదా : - క్రింది దత్తాంశం నుంచి ఋతు సంబంధమైన సూచీని కనుగొనండి.

ఒక కంపెనీలో ఉత్పత్తి మిలియన్ టన్నులలో ఇలా వుంది.

సం॥	1999	2000	2001	2002	2003
I త్రైమాసికం	72	76	74	76	78
II త్రైమాసికం	68	70	66	74	74
III త్రైమాసికం	80	82	84	84	86
IV త్రైమాసికం	70	74	80	78	82

జవాబు :

సం॥	I క్వార్టర్	II క్వార్టర్	III క్వార్టర్	IV క్వార్టర్
1999	72	68	80	70
2000	76	70	82	74
2001	74	66	84	80
2002	76	74	84	78
2003	78	74	86	82
	376	352	416	384
క్వార్టర్ సగటు	$\frac{376}{5}$	$\frac{352}{5}$	$\frac{416}{5}$	$\frac{384}{5}$
(ఋతువు సగటు)	75.2	70.4	83.2	76.8

$$\text{వార్షిక సగటు} = \frac{75.2+70.4+83.2+76.8}{4}$$

$$=\frac{305.6}{4} = 76.4$$

$$\text{ఋతు సంబంధమైన సూచీ} = \frac{\text{ఋతువు యొక్క సగటు}}{\text{వార్షిక సగటు}} \times 100$$

I క్వార్టర్ (త్రైమాసికం) $= \frac{75.2}{76.4}\times 100 = 98.43\%$

II క్వార్టర్ (త్రైమాసికం) $= \frac{70.4}{76.4}\times 100 = 92.15\%$

III క్వార్టర్ (త్రైమాసికం) $= \frac{83.2}{76.4}\times 100 = 108.9\%$

IV క్వార్టర్ (త్రైమాసికం) $= \frac{76.8}{76.4}\times 100 = 100.52\%$

ఉదా : 2 : ~~ఈ~~ క్రింది వివరాలకు సామాన్య సగటు పద్ధతి ద్వారా ఋతు సంబంధ సూచీ కనుగొనండి.

నెల సం॥	జనవరి	ఫిబ్రవరి	మార్చి	ఏప్రిల్	మే	జూన్	జులై	ఆగస్టు	సెప్టెంబర్	అక్టోబర్	నవంబర్	డిసెంబర్
2001	45	48	54	54	69	69	60	84	87	99	99	114
2002	69	66	84	81	93	84	66	84	96	111	102	132
2003	75	75	105	108	108	90	90	102	114	141	123	159

జవాబు :

నెల సం॥	జనవరి	ఫిబ్రవరి	మార్చి	ఏప్రిల్	మే	జూన్	జులై	ఆగస్టు	సెప్టెంబర్	అక్టోబర్	నవంబర్	డిసెంబర్
2001	45	48	54	54	69	69	60	84	87	99	99	114
2002	69	66	84	81	93	84	66	84	96	111	102	132
2003	75	75	105	108	108	90	90	102	114	141	123	159
మొత్తం	189	189	243	243	270	243	216	270	297	351	324	405
నెలసగటు	$\frac{189}{3}$	$\frac{189}{3}$	$\frac{243}{3}$	$\frac{243}{3}$	$\frac{270}{3}$	$\frac{243}{3}$	$\frac{216}{3}$	$\frac{270}{3}$	$\frac{297}{3}$	$\frac{351}{3}$	$\frac{324}{3}$	$\frac{405}{3}$
	63	63	81	81	90	81	72	90	99	117	108	135

$$\text{వార్షిక సగటు} = \frac{63+63+81+81+90+81+72+90+99+117+108+135}{12}$$

$$= \frac{1080}{12} = 90$$

$$\text{ఋతుసంబంధ సగటు} = \frac{\text{నెలవారీ సగటు}}{\text{వార్షిక సగటు}} \times 100$$

జనవరి = $\frac{63}{90}\times 100 = 70$ ఏప్రిల్ = $\frac{81}{90}\times 100 = 90$ జులై = $\frac{72}{90}\times 100 = 80$

ఫిబ్రవరి = $\frac{63}{90}\times 100 = 70$ మే = $\frac{90}{90}\times 100 = 100$ ఆగస్టు = $\frac{90}{90}\times 100 = 100$

మార్చి = $\frac{81}{90}\times 100 = 90$ జూన్ = $\frac{81}{90}\times 100 = 90$ సెప్టెంబర్ = $\frac{99}{90}\times 100 = 110$

అక్టోబర్ = $\frac{117}{90}\times 100 = 130$ నవంబర్ = $\frac{108}{90}\times 100 = 120$ డిసెంబర్ = $\frac{135}{90}\times 100 = 150$

ఉదా : తపాలా పెట్టెలో 4 వారాలలో పోస్ట్ చేయబడిన ఉత్తరాల సంఖ్య ఆధారంగా ఋతు సంబంధ సూచీని కనుగొనండి.

రోజులు	సోమ	మంగళ	బుధ	గురు	శుక్ర	శని
I వారం	86	150	175	160	150	192
II వారం	90	162	164	135	175	175
III వారం	94	148	154	139	167	185
IV వారం	70	140	185	154	168	178

జవాబు :

I వారం	86	150	175	160	150	192
II వారం	90	162	164	135	175	175
III వారం	94	148	154	139	167	185
IV వారం	70	140	185	154	168	178
	------	------	------	------	------	------
	340	600	678	588	660	730
	------	------	------	------	------	------

ఒక్క రోజు సగటు	$\frac{340}{4}$	$\frac{600}{4}$	$\frac{678}{4}$	$\frac{588}{4}$	$\frac{660}{4}$	$\frac{730}{4}$
	85	150	169.5	147	165	182.5

$$\text{వారపు సూచీ} = \frac{85+150+169.5+147+165+182.5}{6}$$

$$= \frac{899.0}{6} = 149.83$$

$$\text{ఋతు సంబంధమైన సూచీ} = \frac{\text{రోజు వారీ సగటు}}{\text{వారపు సగటు}} \times 100$$

$$\text{సోమవారపు సూచీ} = \frac{85}{149.83} \times 100 = 56.73$$

$$\text{మంగళవారపు సూచీ} = \frac{150}{149.83} \times 100 = 100.11$$

$$\text{బుధవారపు సూచీ} = \frac{169.5}{149.83} \times 100 = 113.13$$

$$\text{గురువారపు సూచీ} = \frac{147}{149.83} \times 100 = 98.11$$

$$\text{శుక్రవారపు సూచీ} = \frac{165}{149.83} \times 100 = 110.12$$

$$\text{శనివారపు సూచీ} = \frac{182.5}{149.83} \times 100 = 121.80$$

7.5 ప్రవృత్తి - నిష్పత్తి పద్ధతి (Method of Ratio to Trend) :

ఇది సామాన్య సగటు పద్ధతి కంటే మెరుగైనది. కాలశ్రేణుల విశ్లేషణలో గుణకార నమూనా పద్ధతిని ఆధారంగా చేసుకొని ఋతుపవనాల మార్పులను నిర్ణయిస్తారు. ఈ పద్ధతి ఏ కాలానికి అయిననూ (అనగా నెల, త్రైమాసికం మొదలైనవి) ఋతు సంబంధ మార్పులు ఇచ్చిన విలువలు, ప్రవృత్తి విలువల నిష్పత్తిపై ఆధారపడి ఉంటాయని భావించబడుతుంది. నిష్పత్తులను లెక్కించడం ద్వారా కాలశ్రేణులు దత్తాంశం నుంచి ప్రవృత్తిని తొలగించవచ్చు.

$$\text{కాబట్టి } \frac{T \times S \times C \times I}{T} = S \times C \times I$$

ఋతు సంబంధ సూచీలను లెక్కించే విధానం ఇలా వుంటుంది

1) కనిష్ట వర్గాల పద్ధతిలో ప్రవృత్తి విలువలు లెక్కించవలె.

2) దత్తాంశంలో ఇచ్చిన విలువలను ప్రవృత్తి విలువలతో భాగించి 100చే హెచ్చించవలె. అనగా శాతాలు లెక్కించవలె.

3) లెక్కించిన శాతాలకు సగటును లెక్కించవలె. ఇక్కడ సగటు అనగా అంకమధ్యమం కావచ్చును లేదా మధ్యగతం కావచ్చును. సగటు లెక్కించడం వలన చక్రీయ యాదృచ్ఛిక మార్పుల ప్రభావం పోతుంది.

4) ఈ విధంగా లెక్కించిన సూచీలను 1200 చేత (దత్తాంశం నెలవారీగా ఇస్తే) లేదా 400 చేత (దత్తాంశం క్వార్టర్ వారీగా ఇస్తే) సమానీకృతం చేయవలె. సమానీకృతం చేయడాన్ని 'K' కారకం అంటారు.

$$K = \frac{1200 \text{ లేదా } 400}{\text{సూచీల మొత్తం}}$$

ఉదా : 4 : ఒక కంపెనీలో ఉత్పత్తి ఇలా వుంది. ఋతు సంబంధ మార్పులను ప్రవృత్తి నిష్పత్తి పద్ధతి ద్వారా లెక్కించండి.

సం॥	I క్వార్టర్	II క్వార్టర్	III క్వార్టర్	IV క్వార్టర్	వార్షిక ఉత్పత్తి
1999	120	150	138	132	540
2000	132	186	180	162	660
2001	150	204	192	174	720
2002	192	258	234	216	900
2003	270	306	288	276	1140

జవాబు : కనిష్ట వర్గాల పద్ధతి ద్వారా ప్రవృత్తి విలువలు తెలియజేయుట.

సం॥ x	వార్షిక ఉత్పత్తి y	క్వార్టర్ సగటు ఉత్పత్తి (y)	dx	dx^2	dxy	Y_c
1999	540	135	-2	4	-270	126
2000	660	165	-1	1	-165	162
2001	720	180	0	0	0	198
2002	900	225	+1	1	225	234
2003	1140	285	+2	4	570	270
N=5		$\sum y=990$	0	10	360	

$$a = \frac{\sum y}{N} = \frac{990}{5} = 198$$

$$b = \frac{\sum dxy}{\sum dx^2} = \frac{360}{10} = 36$$

$$Y_c = a + b\,dx$$

1999 = 198 + 36 (-2)

= 198 - 72 = 126

2000 = 198 + 36 (-1)

= 198 - 36 = 162

2001 = 198 + 36 (0) = 198

2001 = 198 + 36(1)

= 198 + 36 = 234

2002 = 198 + 36(2)

= 198 + 72 = 270

ఇందులో వార్షిక పెరుగుదల 36. అనగా క్వార్టర్‌కు పెరుగుదల $9\left(\frac{36}{4}\right)$. దీని ఆధారంగా క్వార్టర్ ప్రవృత్తి విలువల లెక్కింపు ఇలా ఉంటుంది.

1999 యొక్క ప్రవృత్తి విలువ 126. దీనిని రెండవ క్వార్టర్‌కు మూడవ క్వార్టర్‌కు మధ్యగా చూపవలె. అనగా రెండవ క్వార్టర్‌లో సగం 3వ క్వార్టర్‌లో సగంగా తీసుకొనవలె. క్వార్టర్ పెరుగుదల రేటు 9 కాబట్టి 1999లో 2వ క్వార్టర్‌కు మూడవ క్వార్టర్‌కు ప్రవృత్తి విలువలు 121.5 (126 - 4.5); 130.5 (126 + 4.5) అవుతాయి. ఒకటవ క్వార్టర్ ప్రవృత్తి విలువ 112.5 (121.5 - 9), నాల్గవ క్వార్టర్ ప్రవృత్తి విలువ 139.5(130.5 + 9) అవుతుంది. ఈ విధంగా మిగిలిన సంవత్సరాల క్వార్టర్‌లకు ప్రవృత్తి విలువలు లెక్కించవలె.

క్వార్టర్ ప్రవృత్తి విలువలు

సం॥	I క్వార్టర్	II క్వార్టర్	III క్వార్టర్	IV క్వార్టర్	మొత్తం
1999	112.5	121.5	130.5	139.5	504
2000	148.5	157.5	166.5	175.5	648
2001	184.5	193.5	202.5	211.5	792
2002	220.5	229.5	238.5	247.5	936
2003	256.5	265.5	274.5	283.5	1080

ప్రవృత్తి శాతాలు లెక్కించడం = $y = \frac{\text{ఇచ్చిన విలువ}}{\text{ప్రవృత్తి విలువ}} \times 100$

1999 - I $\frac{120}{112.5} \times 100 = 106.67$

II $\frac{150}{121.5} \times 100 = 123.46$

III $\frac{138}{130.5} \times 100 = 105.75$

IV $\frac{132}{139.5} \times 100 = 94.62$

2000 I $\frac{132}{148.5} \times 100 = 106.67$

II $\frac{186}{157.5} \times 100 = 118.10$

III $\frac{180}{166.5} \times 100 = 108.11$

IV $\frac{162}{175.5} \times 100 = 92.31$

2001- I $\frac{150}{184.5} \times 100 = 81.30$

II $\frac{204}{193.5} \times 100 = 105.43$

III $\frac{192}{202.5} \times 100 = 94.81$

IV $\frac{174}{211.5} \times 100 = 82.27$

2002 I $\frac{192}{220.5} \times 100 = 87.07$

II $\frac{258}{229.5} \times 100 = 112.42$

III $\frac{234}{238.5} \times 100 = 98.11$

IV $\frac{216}{247.5} \times 100 = 87.27$

2003 I $\frac{270}{256.5} \times 100 = 105.26$

II $\frac{306}{265.5} \times 100 = 115.25$

III $\frac{288}{274.5} \times 100 = 104.92$

IV $\frac{276}{283.5} \times 100 = 97.35$

ప్రవృత్తి తొలిగించబడిన తరువాత విలువలు

(ప్రవృత్తి విలువ శాతంగా)

సం॥	I క్వార్టర్	II క్వార్టర్	III క్వార్టర్	IV క్వార్టర్
1999	106.67	123.46	105.75	94.62
2000	88.89	118.10	108.11	92.31
2001	81.30	105.43	94.81	82.27
2002	87.07	112.42	98.11	87.27
2003	105.26	115.25	104.92	97.35
మొత్తము	469.19	574.66	511.70	453.82

సగటు	$\frac{469.19}{5}$	$\frac{574.66}{5}$	$\frac{511.70}{5}$	$\frac{453.82}{5}$	
	= 93.84	= 114.93	= 102.34	= 90.76	= మొత్తము 401.87
సర్దుబాటు చేసిన సూచిక	93.40	114.40	102.86	90.34	

$$\left(\frac{400}{401.87}\times 93.84\right) \quad \left(\frac{400}{401.87}\times 114.93\right)\left(\frac{400}{401.87}\times 102.34\right)\left(\frac{400}{401.87}\times 90.76\right)$$

సగటు సూచికల మొత్తం 401.87. ఇది 400 కంటే ఎక్కువ కాబట్టీ ఋతు సగటు సూచీలకు సర్దుబాటు చేయవలె.

$$\text{సర్దుబాటు చేయవలసిన విలువ (K)} = \frac{400}{\text{సూచికల మొత్తం}} \times \text{సగటు సూచీల విలువ}$$

7.6 చలిత మాధ్యమాల నిష్పత్తి పద్ధతి : -

ప్రవృత్తి, నిష్పత్తి పద్ధతిలో ప్రవృత్తి కనిష్ట వర్గాల పద్ధతిలో లెక్కించబడుతుంది. ఇందులో ప్రవృత్తి చలిత మాధ్యమాల పద్ధతిలో లెక్కించబడుతుంది. ఈ పద్ధతి ద్వారా దత్తాంశంలోని ప్రవృత్తి, చక్రీయ అంశాలను ఈ క్రింది రెండు నమూనాల ద్వారా తొలగించవచ్చును.

1. గుణకార నమూనా = $\mathrm{SI} = \frac{\mathrm{TSCI}}{\mathrm{TC}} \times 100$

2. కూడికల నమూనా = $\mathrm{S+I} = (\mathrm{T+S+C+I}) - (\mathrm{T+C})$

1. గుణకార నమూనా క్రింది విధంగా ఉంటుంది :-

(ఎ) 12 నెలల లేదా 4 క్వార్టర్ల చలిత మాధ్యమాలను కనుగొనవలె. ఈ చలిత మాధ్యమాలు ప్రవృత్తి చక్రీయ మార్పుల మొత్తాన్ని తెలియజేస్తాయి.

(బి) ఇచ్చిన విలువకు చలిత మాధ్యమాల విలువకు నిష్పత్తిని కనుగొని, వాటిని శాతాలుగా మార్చవలె. ఈ శాతాలు ఋతుసంబంధ ప్రభావాన్ని నిరూపిస్తాయి.

$$\mathrm{SI} = \frac{\text{ఇచ్చిన విలువ}}{\text{చలిత మాధ్యమాల విలువ}} \times 100$$

(సి) ఈ విధంగా లెక్కించిన శాతాల సగటు లెక్కించి, యాదృచ్ఛిక మార్పుల ప్రభావాన్ని తొలగించవలె. తద్వారా ఋతుసంబంధ మార్పుల ప్రాథమిక సూచికలను నిర్ణయించవచ్చును.

(డి) ఋతు సంబంధ మార్పుల ప్రాథమిక సూచికల మొత్తం, సాధారణంగా, 1200కు సమానంగా ఉండదు. అందువలన సర్దుబాటు 'K' కారకంను ఉపయోగించి తుది ఋతుసంబంధ సూచీలను లెక్కించవలె.

$$K = \frac{1200 \text{ (త్రైమాసిక దత్తాంశంలో 400)}}{\text{ప్రాథమిక ఋతు సంబంధ సూచీల మొత్తం}}$$

ఉదా : 5 క్రింది వివరాలకు చలిత మాధ్యమాల నిష్పత్తి పద్ధతి ద్వారా గుణకార నమూనాలో ఋతుపవన సూచీని లెక్కించండి.

'A' అనే వస్తువు ధర రూపాయలలో

సం॥	I క్వార్టర్	II క్వార్టర్	III క్వార్టర్	IV క్వార్టర్
2001	6	9	6	12
2002	15	21	18	24
2003	18	27	24	30

జవాబు :

చలిత మాధ్యమాలు, ప్రవృత్తి శాతాలు లెక్కించడం.

సం॥	క్వార్టర్	ధర రూ॥	4 క్వార్టర్ల మొత్తం	రెండు 4 క్వార్టర్ల చలిత మొత్తాలు	4 క్వార్టర్ల చలిత మాధ్యమాలు 5వ వరుస ÷ 8	ప్రవృత్తి శాతాలు $\frac{\text{ధర}}{\text{చలిత మాధ్యమం}} \times 100$
1	2	3	4	5	6	7
2001	I	6	-	-	-	-
	II	9	-	-	-	-
	III	6	33	75	9	6 ÷ 9 × 100 = 67
	IV	12	42	96	12	12 ÷ 12 × 100 = 100
2002	I	15	54	120	15	15 ÷ 15 × 100 = 100
	II	21	66	144	18	21 ÷ 18 × 100 = 117
	III	18	78	159	19.5	18 ÷ 19.5 × 100 = 92
	IV	24	81	168	21	24 ÷ 21 × 100 = 114
2003	I	18	87	180	22.5	18 ÷ 22.5 × 100 = 80
	II	27	93	192	24	27 ÷ 24 × 100 = 113
	III	24	99	-	-	-
	IV	30	-	-	-	-

ఋతు సంబంధ సూచీలు లెక్కించడం

క్వార్టర్ ప్రవృత్తి శాతాలు

సం॥	I క్వార్టర్	II క్వార్టర్	III క్వార్టర్	IV క్వార్టర్	మొత్తం
2001	-	-	67	100	167
2002	100	117	92	114	423
2003	80	113	-	-	193
క్వార్టర్ మొత్తం	180	230	159	214	783
క్వార్టర్ ప్రాథమిక సూచీలు	$180 \div 2=90$	$230 \div 2=115$	$159 \div 2=79.5$	$214 \div 2=107$	$783 \div 2 = 391.5$
సవరించబడిన సూచీలు	$\frac{90\times400}{391.5}=91.5$	$\frac{115\times400}{391.5}=117.5$	$\frac{79.5\times400}{391.5}=81.23$	$\frac{107\times400}{391.5}=109.32$	400

(2) కూడికల నమూనా ఈ క్రింది విధంగా వుంటుంది.

(ఎ) 12 నెలల లేక 4 క్వార్టర్ల చలిత మాధ్యమాలను 3 లెక్కించవలె.

(బి) ఇచ్చిన విలువల నుంచి చలిత మాధ్యమం ప్రవృత్తి విలువను తీసివేసి ఋతుపవన ప్రభావాలను లెక్కించవలె. సూత్రం $S+I=(T+S+C+I)-(T+C)$ అనగా ప్రవృత్తి తొలగించబడిన విలువలు కనుగొనవలె.

(సి) ఋతు సంబంధ మార్పుల ప్రాథమిక సూచీలను లెక్కించవలె.

(డి) ఋతు సంబంధ మార్పుల ప్రాథమిక సూచీల మొత్తం 1200 లేదా 400కు సమానంగా ఉన్నట్లయితే సర్దుబాటు 'K' కారకంను ఉపయోగించి తుది ఋతుసంబంధ సూచీ లెక్కించవలె.

ఉదాహరణ : క్రింది దత్తాంశానికి చలిత మాధ్యమాల నిష్పత్తి పద్ధతి ద్వారా కూడికల నమూనాలో ఋతుసంబంధ సూచీని గణన చేయండి.

సం॥	I క్వార్టర్	II క్వార్టర్	III క్వార్టర్	IV క్వార్టర్
2001	6	9	6	12
2002	15	21	18	24
2003	18	27	24	30

జవాబు : చలిత మాధ్యమాల గణన మరియు ప్రవృత్తి తొలగింపు ద్వారా వచ్చిన విలువలు

సం॥	క్వార్టర్లు	ధర రూ॥	క్వార్టర్ల మొత్తం	కేంద్రీకృతం చేయబడిన రెండు మొత్తాలు	ప్రాథమిక క్వార్టర్ల చలిత మాధ్యమాలు	ధర - చలిత మాధ్యమాలు
2001	I	6	-	-	-	-
	II	9	33	-	-	-
	III	6	42	75	9.0	6 - 9 = -3
	IV	12	54	96	12.0	12 - 12 = 0
2002	I	15	66	120	15.0	15 - 15 = 0
	II	21	78	144	18.0	21 - 18 = 3
	III	18	81	159	19.5	18 - 19.5 = -1.5
	IV	24	87	168	21	24 - 21 = 3
2003	I	18	93	180	22.5	18 - 22.5 = -4.5
	II	27	99	192	24.0	27 - 24 = 3
	III	24	-	-	-	-
	IV	30	-	-	-	-

ఋతుసంబంధ సూచీల గణన

ప్రవృత్తి తొలగించబడిన విలువలు

సం॥	I క్వార్టర్	II క్వార్టర్	III క్వార్టర్	IV క్వార్టర్	మొత్తం
2001	-	-	-1.0	0	-1.0
2002	0	1.0	-0.5	1.0	1.5
2003	-1.5	1.0	-	-	-0.5
క్వార్టర్ మొత్తాలు	-1.5	2.0	-1.5	1.0	0
క్వార్టర్ సగటు	-0.75	1.0	-0.75	0.5	0

క్వార్టర్ సగటుల మొత్తం 'సున్నా' కాబట్టి సర్దుబాటు కారకంను ఉపయోగించనక్కరలేదు. కాబట్టి ప్రాథమిక క్వార్టర్ చలిత మాధ్యమాల విలువలను తుది ఋతుసంబంధ సూచీలుగా తీసుకోవచ్చు.

7.7 లింక్ సాపేక్షాల పద్ధతి :

లింక్ సాపేక్షాల పద్ధతి ద్వారా ఋతు సంబంధ సూచీలను లెక్కించడాన్ని కార్ల్‌పియర్సన్ రూపొందించినారు. అందుచేత దీనిని పియర్సన్ ఋతుసంబంధ సూచీ పద్ధతి అని కూడా అంటారు. ఈ పద్ధతి ఇలా వుంటుంది.

(1) దత్తాంశానికి క్రింది సూత్రం ద్వారా సాపేక్షాలను లెక్కించవలె.

$$\text{లింక్ సాపేక్షాల విలువ} = \frac{\text{ప్రస్తుతం ఇచ్చిన విలువ}}{\text{గతకాలపు ఇచ్చిన విలువ}} \times 100$$

(2) లింక్ సాపేక్ష విలువలను ఋతుకాలానుగతంగా ఏర్పరచి వాటి సగటు విలువలను అంకమధ్యమం లేదా మధ్యగతం ద్వారా లెక్కించవలె.

(3) లెక్కించిన ప్రతి సగటు లింక్‌సాపేక్ష విలువలకు, గొలుసు సాపేక్ష విలువలను క్రింది సూత్రం ద్వారా లెక్కించవలె.

$$\text{గొలుసు సాపేక్ష విలువ} = \frac{\text{లింక్ సాపేక్ష విలువ} \times \text{గతకాలపు గొలుసు సాపేక్ష విలువ}}{100}$$

(4) సర్దుబాటు చేయడానికి ప్రతి గొలుసు సాపేక్ష విలువ నుంచి పరిష్కార కారకాలను తీసివేయవలె. అందుకుగాను క్రింది సూత్రాన్ని ప్రయోగించవలె.

ప్రాథమిక రెండు ఋతుకాలాలకు సంబంధించిన లింక్ సాపేక్షాల వ్యత్యాసం =

$$\frac{\text{ప్రాథమిక ఋతుకాలానికి సంబంధించి సవరించిన లింక్ సాపేక్షాల విలువ} - \text{ప్రాథమిక ఋతుకాలానికి సంబంధించిన ప్రాథమిక లింక్ సాపేక్షాల విలువ}}{\text{సంవత్సరంలోని ఋతుకాలం (12 నెలలు లేదా 4 క్వార్టర్లు)}}$$

(5) గొలుసు సూచీల నుంచి పరిష్కార కారకంను తీసివేసి ప్రాథమిక ఋతుపవన సూచీని లెక్కించవలె.

(6) ప్రాథమిక సూచీలను వాటి సగటుల శాతాలుగా లెక్కిస్తూ తుది ఋతుసంబంధ సూచీలను లెక్కించవలె.

ఉదా : 7 క్రింది దత్తాంశం తేయాకు ఎగుమతికి సంబంధించినది. లింక్‌సాపేక్షాల పద్ధతిని ఉపయోగిస్తూ ఋతు సంబంధ సూచీని లెక్కించండి.

భారతదేశం నుంచి తేయాకు ఎగుమతులు రూ. కోట్లలో

సం॥	I క్వార్టర్	II క్వార్టర్	III క్వార్టర్	IV క్వార్టర్
2000	1415	1290	1220	1300
2001	1050	1040	1020	1205
2002	970	840	795	915
2003	795	810	840	945

జవాబు : లింక్ సాపేక్షాల పద్ధతి ద్వారా ఋతు సంబంధ సూచీల గణన

సం॥	I క్వార్టర్	II క్వార్టర్	III క్వార్టర్	IV క్వార్టర్	
2000	-	91.17	94.57	106.56	$\frac{1290}{1415}\times100 = 91.17$
2001	80.76	99.05	98.07	118.14	$\frac{1220}{1290}\times100 = 94.57$
2002	80.99	86.59	94.64	115.09	
2003	86.88	101.88	103.70	112.50	
మొత్తం	248.13	378.69	390.98	452.29	
అంక మధ్యమం	82.71	94.67	97.75	113.07	
గొలుసు సాపేక్షాలు	100	$\frac{94.67\times100}{100}=96.67$	$\frac{97.75\times94.67}{100}=92.54$	$\frac{113.07\times92.54}{100}=104.64$	
సర్దుబాటు చేసిన గొలుసు సాపేక్షాలు	100	98.03*	95.9*	108*	$= \frac{401.93}{4}=100.48$
ఋతుసంబంధ సూచీలు	$\frac{100}{100.48}\times100$	$\frac{98.03}{100.48}\times100$	$\frac{95.9}{100.48}\times100$	$\frac{108}{100.48}\times100$	
$\frac{\text{సవరించిన గొ.సా.}}{\text{స.గొ.సా. సగటు}}\times 100$	= 99.52	= 97.56	= 95.44	= 107.48	

* క్వార్టర్ ఒకటికి వ్యత్యాసం : -

4వ క్వార్టర్ ఆధారంగా 1వ క్వార్టర్ గొలుసు సాపేక్ష విలువలు లెక్కించడం =

$$\frac{\text{మొదటి క్వార్టర్ లింక్ సాపేక్ష విలువ} \times \text{4వ క్వార్టర్ యొక్క గొలుసు సాపేక్ష విలువ}}{100}$$

$$= \frac{82.71\times104.64}{100}=86.55$$

I క్వార్టర్ ప్రస్తుత గొలుసు సాపేక్ష విలువ, గతంలో లెక్కించిన గొలుసు సాపేక్ష విలువల మధ్య గల వ్యత్యాసం =

86.55 - 100 = - 13.45

క్వార్టర్ 1కి వ్యత్యాసం = $\frac{-13.45}{4} = -3.36$

సర్దుబాటు చేసిన గొలుసు సాపేక్షకాలు :

I క్వార్టర్	=	100
II క్వార్టర్	=	98.03 (94.67 - (-3.36))
III క్వార్టర్	=	95.9 (92.54 - (-3.36))
IV క్వార్టర్	=	108.0 (104.64 - (-3.36))

4.8 ఋతు ప్రభావాలను తొలగించడం (Deseasonalisation) :

కాలశ్రేణుల ప్రస్తుత విలువల నుంచి ఋతు సంబంధ మార్పులను తొలిగించే ప్రక్రియనే "ఋతు ప్రభావాలను తొలగించడం" అంటారు. కాల శ్రేణుల నుంచి ప్రవృత్తిని తొలిగించిన తరువాత ఋతు సంబంధ మార్పులను తొలిగించడానికి ఈ ప్రక్రియను చేపడతారు. దీని వలన చక్రీయ మార్పులను, క్రమరహిత మార్పులను అధ్యయనం చేయడానికి వీలవుతుంది. ఋతు ప్రభావాలను తొలగించడం అనే చర్య వలన కాలశ్రేణుల విఘటనంనకు (Decomposition of time series) దోహదపడుతుంది. దీని వలన కాలశ్రేణులను వివిధ అంశాలుగా అనగా ప్రవృత్తి, ఋతుసంబంధ మార్పులు, చక్రీయ, క్రమరహిత మార్పులుగా వర్గీకరించవచ్చును. ఉత్పత్తి, మార్కెటింగ్ కార్యకలాపాలను ప్రణాళికీకరణ చేయడానికి వ్యాపార వేత్తలకు, నిర్వహణాధికారులకు ఋతుభారాల తొలగింపు ఎంతగానో ఉపయోగపడుతుంది. కాలశ్రేణులు ఇచ్చిన విలువలను వివరించడానికి కూడా ఋతు ప్రభావాల తొలగింపు దోహదకారిగా వుంటుంది.

ఋతు ప్రభావాల తొలగింపు విధాన క్రమం :

కాలశ్రేణులలోని ఋతు ప్రభావాలను తొలగించడానికి రెండు పద్ధతులున్నాయి. అవి సంకలన (కూడిక) నమూనా, గుణకార నమూనా. సంకలన నమూనాలో ఋతు ప్రభావాలను తొలగించడానికి ఇచ్చిన విలువల నుంచి లేదా కాలశ్రేణులు శేషవిచరణాలనుంచి గాని ఋతుగత మార్పులను తీసివేయవలె. సూత్రం ఇలా వుంటుంది.

$$\bar{S}=(O-T)-S \text{ లేదా } \bar{S}=O-S$$

$\bar{S}$ అనగా ఋతు ప్రభావాల తొలగింపు (Deseasonalised data)

O అనగా కాలశ్రేణుల ఇచ్చిన విలువ (Observed Value of Time series)

T అనగా Y శ్రేణి యొక్క ప్రవృత్తి విలువ (Trend value of 'Y' series)

S అనగా ప్రేక్షిత లేదా ఇచ్చిన విలువల ఋతు సంబంధ మార్పులు.

గుణకార నమూనాలో - ప్రవృత్తి తొలగించబడిన కాలశ్రేణుల దత్తాంశంను లేదా ప్రేక్షిత విలువను, సంబంధిత ఋతుసంబంధ పరిణామంతో భాగించవలె.

$$\text{సూత్రం} = \bar{S}=\frac{O/T}{S.E.} \text{ లేదా } \bar{S}=\frac{O}{S.E.}$$

O అనగా కాలశ్రేణుల ఇచ్చిన విలువ లేదా ప్రేక్షిత విలువ

SE అనగా ఋతుసంబంధ పరిణామ విలువ (Seasonal effect)

SE ని ఋతు సంబంధ సూచీని 100 చే భాగించి లెక్కిస్తారు. కాబట్టి

$$SE = \frac{SI}{100}$$

7.9 ఋతు సంబంధ సూచీవలన ప్రయోజనాలు - నష్టాలు :

ప్రయోజనాలు : -

1. కాలశ్రేణులలోని ఋతు విచరణాలను తేలికగా అర్థం చేసుకోవడానికి ఋతు సంబంధ సూచీలు ఉపయోగపడతాయి.
2. ఆర్థికపరమైన అంచనాలు వేయడానికి నిర్వహణ పరమైన నిర్ణయాలు చేయడానికి ఋతుసంబంధ సూచీలను ఉపయోగించవచ్చును. ఉదా:- అధిక ఉత్పత్తిని సాధించడం, లాభాలను మెరుగు పరచుకోవడం మొదలైనవి.
3. దత్తాంశంలోని స్వల్పకాలిక హెచ్చుతగ్గులను అధ్యయనం చేయడానికి ఋతుప్రభావాల తొలగింపు ఎంతో ఉపయోగపడుతుంది.

నష్టాలు :-

1. ఋతు సంబంధ సూచీల లెక్కించే విధానాలు వాస్తవాలకు దూరంగా ఉన్న భావనలపై ఆధారపడి ఉంటాయి. ఉదా: - అన్ని ఋతువులలో మార్పులు క్రమబద్ధంగా నిర్దిష్టంగా ఏర్పడతాయి అని భావించడం.
2. ఋతుసంబంధ సూచీలను లెక్కించడానికి నిర్దిష్టమైన పద్ధతి గాని, సంక్షిప్త విధానం గాని లేకపోవడం.
3. ఋతుసంబంధ సూచీలను లెక్కించడానికి ఉపయోగించే కొలతల విలువలు సామాన్యంగా 100తో విభేదిస్తుంది. కాబట్టి ఒక సం॥లో ప్రతి నెలకు ఋతుసంబంధ సూచిక 100కు దగ్గరగా ఉంటే ఋతు విచరణాలు పెద్దగా లేవని, వాటిలో మార్పులు కేవలం యాదృచ్ఛికం అని భావించవలె.

7.10 ప్రశ్నలు :

1. ఋతుసంబంధ లేదా ఋతు పవన సూచీలు అనగానేమి ? వాటిని కొలవడానికి కారణాలను వివరించండి.
2. ఋతుసంబంధ విచరణాలను కొలిచే పద్ధతులను చర్చించండి.
3. సామాన్య సగటు పద్ధతి గురించి ఉదాహరణాత్మకంగా వివరించండి.
4. ఋతుసంబంధ సూచీవలన ప్రయోజనాలు, పరిమితులు పేర్కొనండి.
5. ప్రవృత్తి నిష్పత్తి పద్ధతి గురించి వివరించండి.

6. చలిత మధ్యమాల నిష్పత్తి గురించి వివరించండి.

7. లింక్‌సాపేక్షాల పద్ధతి గురించి వివరంగా పేర్కొనండి.

8. 'ఋతు ప్రభావాలను తొలగించడం' అంటే ఏమిటి ? దాని విధానం ఏమిటి ?

7.11 అభ్యాసాలు :

1. క్రింది దత్తాంశానికి ఋతుసంబంధ సూచీలను సామాన్య సగటు పద్ధతి ద్వారా లెక్కించండి.

సం॥	I క్వార్టర్	II క్వార్టర్	III క్వార్టర్	IV క్వార్టర్
2000	80.6	89.6	92.0	96.0
2001	100.2	106.2	110.6	119.0
2002	94.4	100.2	104.2	110.4
2003	110.8	118.0	123.2	130.6

2. ఈ క్రింది వివరాలకు సామాన్య సగటు పద్ధతి ద్వారా ఋతుసంబంధ సూచిని కనుగొనండి.

సం॥	I త్రైమాసికం	II త్రైమాసికం	III త్రైమాసికం	IV త్రైమాసికం
1999	216	204	240	210
2000	228	210	246	222
2001	222	198	252	240
2002	228	222	252	234
2003	234	222	258	246

3. ఈ క్రింది వివరాలకు సామాన్య సగటు పద్ధతి ద్వారా ఋతుసంబంధ సూచీ నిర్మించండి.

	1999	2000	2001	2002	2003
జనవరి	400	450	470	500	525
ఫిబ్రవరి	380	410	435	460	475
మార్చి	375	395	425	435	500
ఏప్రిల్	340	370	398	410	435

మే	330	350	370	380	420
జూన్	315	335	350	375	390
జులై	325	340	350	385	415
ఆగస్టు	350	358	380	410	435
సెప్టెంబర్	370	389	400	420	460
అక్టోబర్	400	420	430	460	450
నవంబర్	420	445	470	490	465
డిసెంబర్	445	460	470	510	490

4. క్రింది దత్తాంశం నుంచి ప్రవృత్తి, నిష్పత్తి పద్ధతి ద్వారా ఋతుసంబంధ సూచీలను లెక్కించండి.

సం॥	I క్వార్టర్	II క్వార్టర్	III క్వార్టర్	IV క్వార్టర్
1999	120	160	144	136
2000	136	208	160	176
2001	160	232	216	192
2002	216	304	272	248
2003	320	368	344	328

5. క్రింది దత్తాంశం నుంచి ప్రవృత్తి నిష్పత్తి పద్ధతి ద్వారా ఋతుసంబంధ సూచీలను గణన చేయండి.

సం॥	I త్రైమాసికం	II త్రైమాసికం	III త్రైమాసికం	IV త్రైమాసికం
1999	340	300	305	315
2000	350	290	280	300
2001	340	315	340	335
2002	325	280	280	310
2003	300	275	275	290

6. క్రింది దత్తాంశం నుంచి చలిత మాధ్యమాల నిష్పత్తి పద్ధతి ద్వారా ఋతుసంబంధ సూచీని కనుగొనండి.

సం॥	I క్వార్టర్	II క్వార్టర్	III క్వార్టర్	IV క్వార్టర్
2000	450	360	324	300
2001	516	390	378	480
2002	540	432	396	510
2003	600	468	432	558

7. దిగువ దత్తాంశానికి చలిత మాధ్యమాల నిష్పత్తి పద్ధతిని ఉపయోగిస్తూ కూడికల నమూనా ద్వారా ఋతుసంబంధ సూచీలను లెక్కించండి.

సం॥	I క్వార్టర్	II క్వార్టర్	III క్వార్టర్	IV క్వార్టర్
2000	128.00	108.00	117.60	136.00
2001	127.20	97.60	124.80	144.00
2002	130.40	95.20	135.20	153.60
2003	136.80	105.60	120.00	149.60

8. క్రింది దత్తాంశం నుంచి చలిత మాధ్యమాల నిష్పత్తి పద్ధతి ద్వారా ఋతుసంబంధ సూచీని కనుగొనండి.

సం॥	I త్రైమాసికం	II త్రైమాసికం	III త్రైమాసికం	IV త్రైమాసికం
1999	360	310	342	432
2000	378	333	351	288
2001	369	310	342	369
2002	405	324	324	360
2003	396	342	342	378

9. క్రింది వివరాల నుంచి చలిత మాధ్యమాల నిష్పత్తి పద్ధతి ద్వారా ఋతుసంబంధ సూచీని కనుగొనండి.

సం॥	I క్వార్టర్	II క్వార్టర్	III క్వార్టర్	IV క్వార్టర్
2001	272	244	244	252
2002	260	232	264	244
2003	272	252	252	268

10. క్రింది దత్తాంశం నుంచి చలిత మాధ్యమాల నిష్పత్తి పద్ధతి ద్వారా ఋతుసంబంధ సూచీని లెక్కించండి.

సం॥	క్వార్టర్	విలువలు	4సం॥ల చలిత మొత్తాలు
2000	I	75	-
	II	60	-
	III	54	63.38
	IV	59	63.38
2001	I	86	67.13
	II	65	70.88
	III	63	74.00
	IV	80	75.38
2002	I	90	76.63
	II	72	77.63
	III	66	79.50
	IV	85	81.50
2003	I	100	83.00
	II	78	84.75
	III	72	-
	IV	93	-

11. క్రింది వివరాలకు లింక్ సాపేక్షాల పద్ధతి ద్వారా ఋతుసంబంధ సూచీని కనుగొనండి.

త్రైమాసికం	1999	2000	2001	2002	2003
I	210	245	217	217	238
II	182	196	203	217	252
III	154	154	196	175	182
IV	217	252	224	245	231

12. ఈ క్రింది దత్తాంశం నుంచి లింక్ సాపేక్షాల పద్ధతి ద్వారా ఋతుసంబంధ సూచిని లెక్కించండి.

క్వార్టర్	1999	2000	2001	2002	2003
I	72.0	64.8	81.6	86.4	79.2
II	77.0	94.8	78.0	69.6	87.6
III	93.6	100.8	111.6	90.0	96.0
IV	104.4	87.6	76.8	102.0	85.2

13. లింక్ సాపేక్షాల పద్ధతి ద్వారా క్రింది సమాచారానికి ఋతుసంబంధ సూచీకను కనుగొనండి.

సం॥	I క్వార్టర్	II క్వార్టర్	III క్వార్టర్	IV క్వార్టర్
1999	234	226	213	219
2000	225	204	198	213
2001	234	219	219	231
2002	240	207	198	216
2003	210	195	183	204

14. క్రింది దత్తాంశానికి కార్ల్‌పియర్సన్ పద్ధతి ప్రకారం ఋతుసంబంధ సూచీని కనుగొనండి.

త్రైమాసికం	2000	2001	2002	2003
I	130	136	140	120
II	116	126	118	110
III	112	126	112	102
IV	122	134	104	116

రచయిత

శ్రీ టి. నాగేశ్వరరావు

పాఠం - 8

సెట్ సిద్ధాంతం

SET THEORY

పాఠ్య నిర్మాణ క్రమం :

8.0. ఉద్దేశ్యాలు

8.1. పరిచయం

8.2. సెట్ సిద్ధాంతం వివరణ

8.3. సెట్ సిద్ధాంతం యొక్క చరిత్ర

8.4. సెట్ సిద్ధాంతం-ప్రాథమిక భావనలు

8.4.1. A మరియు B సెట్ల యూనియన్

8.4.2. A మరియు B సెట్‌ల ఖండన

8.4.3. U మరియు A యొక్క సెట్ తేడా

8.4.4. సమరూప వ్యత్యాసం

8.4.5. కార్టేసియన్ ఉత్పత్తి

8.4.6. పవర్ సెట్

8.4.7. సహజ సంఖ్యల సమితి

8.5. వాన్ న్యూమాన్ సోపాన క్రమం

8.6. సెట్‌లోని వివిధ అధ్యయన రంగాలు

8.6.1. సహకార సెట్ సిద్ధాంతం

8.6.2. వివరణాత్మక సెట్ సిద్ధాంతం

8.6.3. మసక సెట్ సిద్ధాంతం

8.6.4. నిర్ణయాత్మక పెద్ద కార్డినల్స్ నమూనా

8.6.5. పెద్ద కార్డినల్స్

8.6.6. నిశ్చయతమైనది

8.6.7. బలవంతం

8.6.8. కార్డినల్‌లో మార్పులేనివి

8.6.9. సెట్ సిద్ధాంతం యొక్క ఆకారం

8.6.10. సిద్ధాంతాన్ని సెట్ చేయడానికి అభ్యంతరాలు

8.7. ముగింపు

8.8. మాదిరి పరీక్ష ప్రశ్నలు

8.9. ఆచూకి గ్రంథాలు

8.0. ఉద్దేశాలు :

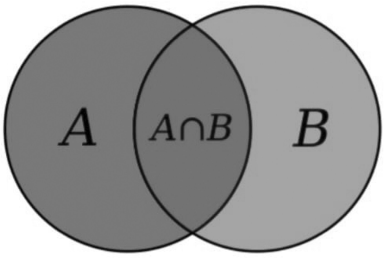
- సెట్ సిద్ధాంతం, సంఖ్యలు లేదా విధులు లాంటి గణిత స్వభావం కలిగి ఉండవచ్చును లేదా ఉండక పోవచ్చును. ఇందులో వస్తువుల యొక్క బాగా నిర్వచించబడిన సేకరణ లక్షణాలలో వ్యవహరించే గణిత శాఖ.
- సెట్ సిద్ధాంతం ముఖ్యంగా ఒక వస్తువు '0' సున్నా మరియు సెట్ "A" మధ్య ప్రాథమిక బైనరీ సంబంధంతో ప్రారంభమౌతుంది.
- సెట్ సిద్ధాంతం ప్రకారం ఒక సమితి దానిలోని సభ్యులందరు సమితులైనప్పుడు దాని సమితిని సభ్యులందరిని కలిపి సెట్ అంటారు.
- అదేవిధంగా సెట్ సిద్ధాంతంలో అనేక అధ్యయనాంశాలు ఉంటాయి. ఇందులో ముఖ్యమైనవి సహకారం సెట్, వివరణాత్మక సెట్ మొదలగునవి ఉంటాయి. వీటిని గురించి పరిశీలించుటకు సెట్ సిద్ధాంతం ఉపయోగపడుతుంది.

8.1. పరిచయం :

సెట్ సిద్ధాంతం అనునది గణిత శాస్త్రం యొక్క విభాగం, ఇది సెట్‌లను అధ్యయనం చేస్తుంది. దీనిని అనధికారంగా వస్తువుల సేకరణలుగా వర్గీకరించవచ్చును. గణిత శాస్త్రంలో ఒక శాఖగా ఏ రకమైన వస్తువులైనా సమితి-సెట్ సిద్ధాంతంగా సేకరించబడినప్పటికి, మొత్తం గణితానికి సంబంధించిన వాటికి సంబంధించినవి ఎక్కువగా ఉంటాయి.

సెట్ సిద్ధాంతం అనునది గణిత తర్కం యొక్క విభాగం, ఇది సెట్‌లను అధ్యయనం చేస్తుంది. దీనిని అనధికారికంగా వస్తువుల సేకరణలుగా వర్ణించవచ్చును. గణిత శాస్త్రంలో ఒక శాఖగా ఏ రకమైన వస్తువులైనా సమితి, సెట్ సిద్ధాంతంగా సేకరించినప్పటికీ, మొత్తంగా గణితానికి సంబంధించిన వాటికి సంబంధించినవి అధికంగా ఉంటాయి. ఉదాహరణకు రెండు సెట్ల ఖండనను వివరించే వెన్ రేఖా చిత్రం ద్వారా వివరించవచ్చును.

రేఖా చిత్రం - 1



రెండు సెట్ల ఖండనను వివరించే వెన్ రేఖా చిత్రం

8.2. సెట్ సిద్ధాంతం వివరణ :

సెట్ సిద్ధాంతం యొక్క ఆధునిక అధ్యయనాన్ని 1870వ సంవత్సరంలో జర్మన్ గణిత శాస్త్రవేత్తలు రిచర్డ్ డెడికింద్ మరియు జార్జ్ కాంటర్‌లు ప్రారంభించారు. ప్రత్యేకించి, జార్జ్ కాంటర్ సాధారణంగా సెట్ సిద్ధాంతం స్థాపకుడిగా పరిగణించబడతాడు. ప్రారంభదశలో పరిశోధించబడిన నాన్-ఫార్మలైజ్డ్ సిస్టమ్స్ నైవ్ సెట్ సిద్ధాంతం పేరుతో ఉన్నాయి. ముఖ్యంగా నైవ్ సెట్ సిద్ధాంతంలోని వైరుధ్యాలను కనుగొన్న తరువాత 20వ శతాబ్దం ప్రారంభంలో వివిధ వ్యవస్థలు ప్రతిపాదించబడినాయి. వీటిలో జెర్మెలో-ఫ్రెంకెల్ సెట్ సిద్ధాంతం ఇప్పటికి బాగా తెలిసిన మరియు ఎక్కువగా అధ్యయనం చేయబడినది.

సెట్ సిద్ధాంతం సాధారణంగా మొత్తం గణితానికి పునాది వ్యవస్థగా ఉపయోగించబడుతుంది. ప్రత్యేకించి ఎంపిక యొక్క సూత్రంతో జెర్మెలో-ఫ్రెంకెల్ సెట్ సిద్ధాంతం రూపంలో ఉంటుంది. కంప్యూటర్ సైన్స్‌లో (రిలేషనల్ ఆల్జీబ్రా సిద్ధాంతం) తత్వశాస్త్రం మరియు అధికారిక అర్థశాస్త్రంలో వివిధ అనువర్తనాలను కలిగి ఉన్నది. దాని పునాది అప్పీల్, దాని పారడాక్స్‌తో పాటు, అనంతం మరియు దాని బహుళ అనువర్తనాలకు దాని చిక్కులు, సెట్ సిద్ధాంతాన్ని తార్కికులు మరియు గణితం యొక్క తత్వవేత్తలు, సెట్ సిద్ధాంతంలో సమకాలీన పరిశోధన వాస్తవ సంఖ్య రేఖ యొక్క నిర్మాణం నుండి పెద్ద కార్డినల్ యొక్క స్థిరత్వం యొక్క అధ్యయనం వరకు విస్తృతమైన అంశాల శ్రేణిని తెలియజేస్తుంది.

8.3. సెట్ సిద్ధాంతం యొక్క చరిత్ర :

అనేక మంది పరిశోధకుల మధ్య పరస్పర చర్యల ద్వారా గణిత అంశాలు సాధారణంగా ఉద్భవించాయి మరియు అభివృద్ధి చెందాయి. సెట్ సిద్ధాంతాన్ని 1874వ సంవత్సరంలో జార్జ్ కాంటర్ ద్వారా ఒకే పేపర్ ద్వారా స్థాపించారు.

సెట్ సిద్ధాంతం యొక్క తదుపరి అంశం 1900వ సంవత్సరంలో వచ్చింది. కాంటోరియన్ సెట్ సిద్ధాంతం యొక్క కొన్ని వివరణలు యాంటీనోమిస్ లేదా పారడాక్స్ అని పిలవబడే అనేక వైరుధ్యాలకు దారితీశాయని కనుగొనబడినప్పుడు, అదేవిధంగా 1900వ సంవత్సరంలో కేంబ్రిడ్జ్ యూనివర్సిటి ప్రెస్ ప్రచురించిన భార్యాభర్తలు విలియం హెన్రీయంగ్ మరియు గ్రేస్ చిషోల్మ్ యంగ్ వ్రాసిన థియరీ ఆఫ్ సెట్స్ ఆఫ్ పాయింట్స్ పుస్తకంలో సెట్ అనే పదం కనిపించింది.

8.4. సెట్ సిద్ధాంతం-ప్రాథమిక భావనలు :

సెట్ సిద్ధాంతం ఒక వస్తువు 'O' మరియు సెట్ 'A' మధ్య ప్రాథమిక బైనరీ సంబంధంతో ప్రారంభమౌతుంది. "O" అనేది 'A' యొక్క మూలకం అయితే, $O \in A$ సంజ్ఞామానం ఉపయోగపడుతుంది. కామాలతో వేరు చేయబడిన ఎలిమెంట్‌లను జాబితా చేయడం ద్వారా లేదా దాని మూలకాల యొక్క వర్గీకరణ లక్షణం ద్వారా, కలుపుల అనగా బ్రాకెట్ల { } లో ఒక సెట్ వివరించబడుతుంది. ముఖ్యంగా సెట్‌లు ఆబ్జెక్టివ్‌లు కాబట్టి, మెంబర్‌షిప్ సంబంధ సెట్‌లకు కూడా సంబంధం కలిగి ఉంటుంది.

రెండు సెట్ల మధ్య ఉత్పన్నమైన బైనరీ సంబంధం ఉపసమితి సంబంధం, దీనిని సెట్ ఇన్‌క్లూజన్ అని కూడా అంటారు. 'A' సెట్ లోని సభ్యులందరూ కూడా 'B' సెట్‌లో సభ్యులు అయితే, 'A' అనేది 'B' యొక్క ఉపసమితి $A \subseteq B$ అని సూచిస్తారు.

ఉదాహరణకు {1, 2} అనేది {1, 2, 3} యొక్క ఉప సమితి, అలాగే {2} అయితే {1, 4} కాదు. ఈ నిర్వచనం ద్వారా సూచించినట్లుగా సమితి అనేది దాని యొక్క ఉపసమితి. ఈ అవకాశం సరికాని లేదా తిరస్కరించబడిన సందర్భాలకు సరైన ఉపసమితి అనే పదం నిర్వచించబడినది 'A' అంటారు. 'A' అనేది 'B' యొక్క ఉపసమితి అయితే మరియు మాత్రమే 'B' యొక్క సరైన ఉపసమితి, కాని 'A' అనేది 'B' కి సమానం కాదు. అలాగే 1, 2 మరియు 3 లు {1, 2, 3} సెట్ లోని సభ్యులు (మూలకాలు). కానీ దాని ఉపసమితులు కాదు. అలాగే, ప్రతిగా {1} లాంటి ఉపసమితులు {1, 2, 3} సెట్‌లో సభ్యులు కావు.

అంకగణితం సంఖ్యలపై బైనరీ కార్యకలాపాలను కలిగి ఉన్నట్లే, సెట్ సిద్ధాంతం సెట్లపై బైనరి కార్యకలాపాలను కలిగి ఉంటుంది. వీటిని ఈక్రింది విధంగా వివరించవచ్చును. అవి:

8.4.1. A మరియు B సెట్ల యూనియన్ :

A మరియు B సెట్ల యూనియన్‌ను $A \cup B$ అని సూచించబడుతుంది. ఇది A లేదా B లేదా రెండింటిలో సభ్యుడైన అన్ని వస్తువుల సమితి.

ఉదాహరణ: {1, 2, 3} మరియు {2, 3, 4} కలయిక {1, 2, 3, 4}.

8.4.2. A మరియు B సెట్‌ల ఖండన :

A మరియు B సెట్‌ల ఖండనను $A \cap B$ అని సూచించబడుతుంది. ఇది A మరియు B రెండింటిలో సభ్యులుగా ఉన్న అన్ని వస్తువుల సమితి.

ఉదాహరణ: {1, 2, 3} మరియు {2, 3, 4} ఖండన అనేది సెట్ {2, 3}.

8.4.3. U మరియు A యొక్క సెట్ తేడా :

U మరియు A యొక్క సెట్ తేడాను, U/A అని సూచిస్తారు. ఇది A సభ్యులు కాని U యొక్క సభ్యులందరి సెట్. సెట్ తేడా {1, 2, 3} / {2, 3, 4} {1} అయితే, దీనికి విరుద్ధంగా, సెట్ తేడా {2, 3, 4} / {1, 2, 3} {4}. A అనేది U యొక్క ఉపసమితి అయినప్పుడు, U/A సెట్ వ్యత్యాసం U లో A యొక్క పూరకంగా కూడా పిలవబడుతుంది. ~~ఈ~~ సందర్భంలో U యొక్క ఎంపిక ఉంటే సందర్భం నుండి స్పష్టంగా ఉన్నది. కొన్ని సార్లు U/A కి బదులు A^C సంజ్ఞామానం ఉపయోగించబడుతుంది. ప్రత్యేకించి U అనేది వెన్ రేఖా చిత్రాల అధ్యయనంలో సార్వత్రిక సెట్ అయితే.

8.4.4. సమరూప వ్యత్యాసం :

$A \triangle B$ లేదా $A \theta B$ సెట్ల యొక్క సమరూప వ్యత్యాసం $A \triangle B$ లేదా $A \theta B$ అనేది A మరియు B (సెట్‌లలో ఒకదానిలో ఉన్న మూలకాలు, కానీ రెండింటిలోను లేని మూలకాలు) సభ్యుడైన అన్ని వస్తువుల సమితి.

ఉదాహరణ: {1, 2, 3} మరియు {2, 3, 4} సెట్ల కోసం, సమరూప లేదా సెట్ {1, 4}. ఇది యూనియన్ మరియు ఖండన యొక్క సెట్ తేడా.

$$(A \cup B)/(A \cap B)$$

లేదా

$$(A/B) \cup (B/A)$$

8.4.5. కార్టేసియన్ ఉత్పత్తి :

A మరియు B యొక్క కార్టేసియన్ ఉత్పత్తి, A × B అని సూచించబడుతుంది. దీని సభ్యులందరూ సాధ్యమయ్యే ఆర్డర్ జతల (a, b), ఇక్కడ A సభ్యుడు A మరియు b అనేది B సభ్యుడు.

ఉదాహరణ: {1, 2} మరియు {ఎరుపు, తెలుపు} యొక్క కార్టేసియన్ ఉత్పత్తి {(1, ఎరుపు), (1, తెలుపు), (2, ఎరుపు), (2, తెలుపు)}.

8.4.6. పవర్ సెట్ :

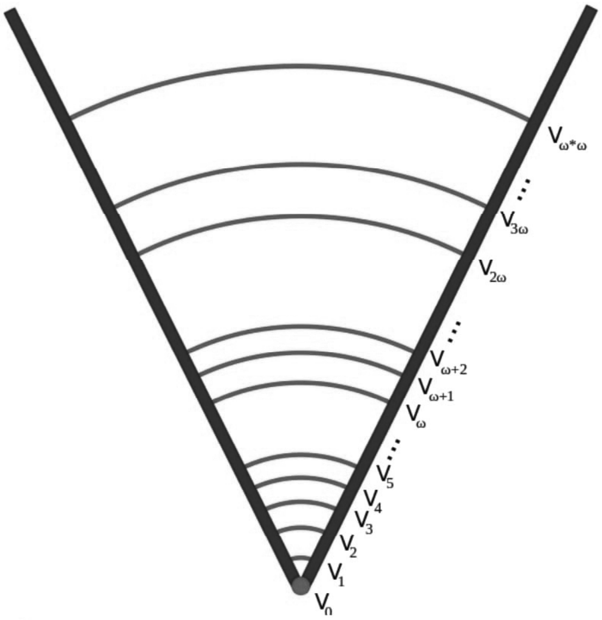
A పవర్ సెట్‌గా సూచించబడినది. P(A) యొక్క సాధ్యమైన ఉపసమితిలలో సభ్యులందరూ ఉంటే సమితి.

ఉదాహరణ: {1, 2} పవర్ సెట్ { { }, {1}, {2}, {1, 2} }.

8.4.7. సహజ సంఖ్యల సమితి :

సహజ సంఖ్యల సమితి, వాస్తవ సంఖ్యల సమితి మరియు సంఖ్యా సెట్‌లు మూలకాలు లేని ప్రత్యేక సమితి. ఖాళీ సెట్‌ను అప్పుడప్పుడు శూన్య సమితి అని కూడా పిలుస్తారు.

8.5. వాన్ న్యూమాన్ సోపాన క్రమం :



వాన్ న్యూమాన్ యొక్క సోపాన క్రమం యొక్క ప్రారంభ విభాగం

ఒక సమితి దానిలోని సభ్యులందరూ సమితులైతే దాని సభ్యులలోని సభ్యులందరూ సెట్‌లు మరియు మొదలైనవి ఉంటే అది స్వచ్ఛమైనది. ఉదాహరణకు ఖాళీ సెట్‌ను మాత్రమే కలిగి ఉన్న { { } } సెట్ ఖాళీగా లేని స్వచ్ఛమైన సెట్ ఆధునిక సెట్ సిద్ధాంతంలో స్వచ్ఛమైన సెట్‌ల వాన్ న్యూమాన్ విశ్వంపై దృష్టిని పరిమితం చేయడం సర్వసాధారణం మరియు అక్ష సంభందమైన సెట్ సిద్ధాంతం యొక్క అనేక వ్యవస్థలు స్వచ్ఛమైన సెట్‌లను మాత్రమే చేయడానికి రూపొందించబడినాయి. ఈ పరిమితిలో అనేక సాంకేతిక ప్రయోజనాలు ఉన్నాయి. మరియు తక్కువ సాధారణ ఉండదు. ఎందుకనగా తప్పనిసరిగా అన్ని గణిత భావనలను స్వచ్ఛమైన సెట్‌ల ద్వారా రూపొందించవచ్చును. వాన్ న్యూమాన్ విశ్వం లోని సెట్‌లు వారి సభ్యులు, సభ్యుల సభ్యులు మొదలైన వాటిని ఎంత లోతుగా నిక్షిప్తం చేశారు అనేదాని ఆధారంగా సంచిత సోపాన క్రమంగా నిర్వహించబడతాయి. ఈ సోపాన క్రమంలోనే ప్రతి సెట్ కేటాయించబడినవి ఒక ఆర్డినల్ సంఖ్య α, దాని ర్యాంక్ అంటారు. స్వచ్ఛమైన సెట్ యొక్క ర్యాంక్ 'X' దానిలోని ఏదైనా మూలకాల ర్యాంక్ కంటే ఖచ్చితంగా అధికంగా ఉండే అతి తక్కువ ఆర్డినల్‌గా నిర్వచించబడినది.

ఉదాహరణకు, ఖాళీ సెట్‌కు ర్యాంకు 'O' కేటాయించబడుతుంది, అయితే ఖాళీ సెట్‌ను కలిగి ఉన్న { { } } సెట్‌కు ర్యాంక్ '1' కేటాయించబడుతుంది. ప్రతి ఆర్డినల్‌కు α, సెట్ V_α కంటే తక్కువ ర్యాంక్‌లో అన్ని స్వచ్ఛమైన సెట్‌లను కలిగి ఉండేలా నిర్వచించబడినది α. మొత్తం వాన్ న్యూమాన్ విశ్వం V లో సూచించబడుతుంది.

8.6. సెట్‌లోని వివిధ అధ్యయన రంగాలు :

సెట్ సిద్ధాంతం అనేది గణితంలో పరిశోధన యొక్క ప్రధాన ప్రాంతం, ఇందులో అనేక పరస్పర సంబంధం ఉన్న ఉప సెట్‌లను ఈక్రింది రీతిలో వివరించవచ్చును. అవి:

8.6.1. సహకార సెట్ సిద్ధాంతం :

సహకార సెట్ సిద్ధాంతం నుండి పరిమిత సహకారం వరకు అనంతమైన సెట్‌ల వరకు పొడిగింపునకు సంబంధించినది. ఇందులో కార్డినల్ అంక గణితం యొక్క అధ్యయనం మరియు ఎర్డాప్-రాడో సిద్ధాంతం లాంటి రామ్‌సే సిద్ధాంతం యొక్క పొడగింపుల అధ్యయనాలు ఉన్నాయి.

8.6.2. వివరణాత్మక సెట్ సిద్ధాంతం :

వ్యాసరూప సెట్ సిద్ధాంతం అనేది సక్రమమైన వరుస యొక్క ఉపసమితులు మరియు సాధారణంగా పోలీస్ ఖాళీల ఉపసమితుల అధ్యయనం. ఇది బోరెల్ సోపాన క్రమంలోని పాయింట్ క్లాసుల అధ్యయనంతో ప్రారంభమవుతుంది . ప్రాజెక్టివ్ హైరార్కి మరియు వాడ్జ్ హైరార్కీ లాంటి మరింత క్లిష్టమైన సోపాన క్రమాల అధ్యయనం వరకు విస్తరించినది.

8.6.3. మసక సెట్ సిద్ధాంతం :

సెట్ సిద్ధాంతంలో కాంటర్ నిర్వచించినట్లుగా మరియు జెర్మెలో మరియు ఫ్రాంకెల్ యాక్సియోమాటైజ్ చేయబడినట్లుగా, ఒక వస్తువు సమితిలో సభ్యుడో కాదో. అస్పష్టమైన సెట్ సిద్ధాంతంలో ఈ పరిస్థితిని లోట్టి ఎ జాదేహ్ సడలించారు. కాబట్టి ఒక వస్తువు సమితిలో సభ్యత్వ స్థాయిని కలిగి ఉంటుంది, 'O' మరియు '1' మధ్య సంఖ్య.

ఉదాహరణకు, పొడవైన వ్యక్తుల సెట్‌లో ఒక వ్యక్తి యొక్క సభ్యత్వ స్థాయి. సాధారణంగా అవును లేదా కాదు సమాధానం కంటే మరింత సరళమైనది మరియు 0.75 లాంటి వాస్తవ సంఖ్య కావచ్చును.

8.6.4. నిర్ణయాత్మక పెద్ద కార్డినల్స్ నమూనా :

నిర్ణయాత్మక మరియు పెద్ద కార్డినల్స్ అధ్యయనంలో అంతర్గత నమూనాల అధ్యయనం సాధారణం. ప్రత్యేకించి ఎంపిక సూత్రానికి విరుద్ధంగా ఉండే నిర్ణయాత్మక సూత్రం లాంటి సిద్ధాంతాలను పరిగణనలోకి తీసుకున్నప్పుడు. సెట్ సిద్ధాంతం యొక్క స్థిర నమూనా ఎంపిక సిద్ధాంతాన్ని సంతృప్తి పరచినప్పటికి, ఎంపిక యొక్క సూత్రాన్ని సంతృప్తి పరచినప్పటికి, ఎంపిక యొక్క సూత్రాన్ని సంతృప్తి పరచడంలో అంతర్గత నమూనా విఫలం అవడం సాధ్యమౌతుంది.

8.6.5. పెద్ద కార్డినల్స్ :

పెద్ద కార్డినల్స్ అనేది అదనపు ఆస్థితో కూడిన కార్డినల్ సంఖ్య. కొనుగోలు చేయలేని కార్డినల్స్, కొలవగల కార్డినల్స్ మరియు అనేక విధమైన లక్షణాలను అధ్యయనం చేశారు. ఈ లక్షణాలు సాధారణంగా కార్డినల్ సంఖ్య చాలా పెద్దదిగా ఉండాలని సూచిస్తాయి.

8.6.6. నిశ్చయతమైనది :

సంకల్పం అనేది సముచితమైన అంచనాల ప్రకారం, ఒక ఆటగాడు తప్పనిసరిగా గెలుపు వ్యూహాన్ని కలిగి ఉండాలనే ఉద్దేశ్యంతో ఖచ్చితమైన సమాచారం యొక్క నిర్దిష్టంగా ఇద్దరూ ఆటగాళ్ళ గేమ్‌లు ప్రారంభం నుండి నిర్ణయించబడతాయి. ఈ వ్యూహాల ఉనికి వివరణాత్మక సెట్ సిద్ధాంతంలో ముఖ్యమైన పరిణామాలను కలిగి ఉన్నది. ఎందుకనగా విస్తృత తరగతి గేమ్‌లు నిర్ణయించబడతాయనే భావన తరచుగా విస్తృత తరగతి సెట్‌లు టోపాలాజికల్ ప్రాపర్టీని కలిగి ఉంటాయని సూచిస్తుంది.

8.6.7. బలవంతం :

నిర్మాణ మరియు అసలైన నమూనా ద్వారా నిర్ణయించబడిన లక్షణాలలో (అనగా బలవంతంగా) ఒక పెద్ద మోడల్‌ను రూపొందించడానికి సెట్ సిద్ధాంతం అదనపు సెట్‌ల యొక్క కొన్ని ఇచ్చిన మోడల్‌కు బలవంతంగా అనుకొని ఉంటుంది.

ఉదాహరణకు, కోహెన్ నిర్మాణం అసలు మోడల్ యొక్క కార్డినల్ సంఖ్యలను మార్చకుండా సహజ సంఖ్యల అదనపు ఉపసమితులను అనుకొని ఉంటుంది. ఫినిటిస్టిక్ పద్ధతుల ద్వారా సాపేక్ష స్థిరత్వాన్ని నిరూపించే రెండు పద్ధతులలో బలవంతం కూడా ఒకటి, మరొక పద్ధతి బూలియన్ విలువైన నమూనాలు.

8.6.8. కార్డినల్‌లో మార్పులేనివి :

కార్డినల్ స్థిరమైన సంఖ్యల ద్వారా కొలవబడిన వాస్తవరేఖ యొక్క ఆస్థి. ఉదాహరణకు బాగా అధ్యయనం చేయబడిన మార్పులేనిది అనేది మొత్తం వాస్తవరేఖగా ఉన్న కొద్దిపాటి నకళ్ళు సేకరణ యొక్క అతి చిన్న కార్డినాలిటి సెట్. సిద్ధాంతం యొక్క ఏదైనా రెండు ఐసోమార్ఫిక్ నమూనాలు ప్రతి అస్థిరతకు ఒకే కార్డినల్‌ను ఇవ్వాలి అనే అర్థంలో ఇవి మార్పు లేనివి. అనేక స్థిరమైన కార్డినల్ అధ్యయనాలు చేయబడినాయి మరియు వాటి మధ్య సంబంధాలు తరచుగా సంక్లిష్టంగా ఉంటాయి మరియు సెట్ సిద్ధాంతం యొక్క సిద్ధాంతాలకు సంబంధించినవి.

8.6.9. సెట్ సిద్ధాంతం యొక్క ఆకారం :

సెట్ సిద్ధాంతం ఆకారం సాధారణ ఆకారంలోని ప్రశ్నలను అధ్యయనం చేస్తుంది. ఇవి సెట్ సిద్ధాంత స్వభావంతో ఉంటాయి లేదా వాటి పరిష్కారం కోసం సెట్ సిద్ధాంతం యొక్క ఆధునాతన పద్ధతులు అవసరం.

8.6.10. సిద్ధాంతాన్ని సెట్ చేయడానికి అభ్యంతరాలు :

సెట్ సిద్ధాంతం ప్రారంభం నుండి, కొంతమంది గణిత శాస్త్రజ్ఞులు దీనిని గణితానికి పునాదిగా వ్యతిరేకించారు. సెట్ సిద్ధాంతం అత్యంత సాధారణ అభ్యంతరం. సెట్ సిద్ధాంతం యొక్క ప్రారంభ సంవత్సరాలలో ఒక క్రొనెకర్ గాత్ర దానం చేశాడు. గణితం గణనకు వదులుగా సంబంధం కలిగి ఉన్నదనే నిర్మాణాత్మక దృక్పథం నుండి ప్రారంభమౌతుంది. ఈ దృక్కోణం మంజూరు చేయబడితే, అనంతమైన సెట్‌ల చికిత్స, అమాయక మరియు అక్షసంబంధమైన సెట్ సిద్ధాంతంలో, సూత్రప్రాయంగా కూడా గణించలేని గణిత పద్ధతులు మరియు వస్తువులను పరిచయం చేస్తుంది.

8.7 ముగింపు :

సెట్ సిద్ధాంతం అనునది గణితశాస్త్రం యొక్క విభాగం. సెట్ సిద్ధాంతం యొక్క ఆధునిక అధ్యయనాన్ని 1870వ సంవత్సరంలో జర్మన్ గణిత శాస్త్రవేత్తలు ప్రారంభించారు. సెట్ సిద్ధాంతంలో ఒక వస్తువు "O" మరియు సెట్ "A" ల మధ్య ప్రాథమిక బైనరీ సంబంధంతో ప్రారంభమౌతుంది. సెట్ సిద్ధాంతం కొన్ని ముఖ్యమైన ప్రాథమిక భావనలపై ఆధారపడి ఉన్నది. సెట్ సిద్ధాంతం సహజ సంఖ్యల సమితిపై ఆధారపడి పనిచేస్తుంది. అంతేకాకుండా సెట్ సిద్ధాంతాలోని వివిధ అధ్యయన రంగాల ద్వారా ఏవిధంగా సంబంధం కలిగి ఉన్నదో వివరించుటకు ఉపయోగపడుతుంది.

8.8. మాదిరి పరీక్ష ప్రశ్నలు :

I వ్యాసరూప ప్రశ్నలు :

1. సెట్ సిద్ధాంతం అనగానేమి ? వివరించండి ?
2. సెట్ సిద్ధాంతం యొక్క వివరణ మరియు దాని యొక్క చరిత్రను మరియు ప్రాథమిక భావనలను వివరించండి?
3. సెట్ సిద్ధాంతం అనగానేమి ? సెట్ సిద్ధాంతంలోని వివిధ అధ్యయన రంగాలను విశ్లేషించండి ?

II సంక్షిప్త వ్యాసరూప ప్రశ్నలు :

1. సెట్ సిద్ధాంతం అనగానేమి ?
2. సెట్ సిద్ధాంతం భావనలు

III సంక్షిప్త ప్రశ్నలు :

1. సహజ సంఖ్యల సమితి ?
2. సెట్ సిద్ధాంతం అధ్యయనాంశాలు ?
3. సెట్ సిద్ధాంతం యొక్క చరిత్ర ?

8.9. ఆచూకి గ్రంథాలు :

1. జాన్సన్, ఫిలిప్ (1972). ఎ హిస్టరి ఆఫ్ సెట్ థియరి. ప్రెండిల్, విబర్ & స్మిత్.

2. యంగ్, విలియం: యంగ్, గ్రేప్ చిషోల్మ్ (1906). థియరి ఆఫ్ సెట్స్ ఆఫ్ పాయింట్స్. కేంబ్రిడ్జి యూనివర్శిటి ప్రెస్.

3. జెచ్, థామస్ (2003). సెట్ థియరీ, స్ప్రింగర్ మోనోగ్రాఫ్స్ ఇన్ మ్యాథమెటిక్స్. థర్డ్ మిలీయం ఎడిషన్ బేర్లిన్, న్యూయార్క్ స్ప్రింగర్-వెర్లాగ్. 642.

4. ఫెర్రీరోస్, జోస్ (2001). లాబిరింత్ ఆఫ్ థాట్: ఎ హిస్టరీ ఆఫ్ సెట్ థియరీ అండ్ ఇట్స్ రోల్ ఇన్ మోడ్రన్ మ్యాథమెటిక్స్. బెర్లిన్ స్ప్రింగర్.

పాఠం - 9

షరతులతో కూడిన సంభావ్యత

CONDITIONAL PROBABILITY

పాఠ్య నిర్మాణ క్రమం :

9.0. ఉద్దేశ్యాలు

9.1. పరిచయం

9.2. షరతులతో కూడిన సంభావ్యత అనగానేమి

9.3. నోటేషన్

9.4. ఫార్ములా

9.5. జాగ్రత్తలు

9.6. విశ్లేషణ

9.7. షరుతులతో కూడిన వివిక్త పంపిణిలు

9.8. షరుతులతో కూడిన నిరంతర పంపిణీలు

9.9. స్వతంత్ర ఈవెంట్

9.10. లక్షణాలు

9.11. కొలత సిద్ధాంత సూత్రీకరణ

9.12. షరతులతో కూడిన నిరీక్షణకు సంబంధం

9.13. ముగింపు

9.14. మాదిరి పరీక్ష ప్రశ్నలు

9.15. ఆచూకి గ్రంథాలు

9.0 ఉద్దేశాలు :

- సాధారణంగా ఒకటి కంటే ఎక్కువ రెండు వేరియబుల్స్ యొక్క ఉపసమితి యొక్క షరతులతో కూడిన పంపిణీని సూచించవచ్చును. ఈ షరతులతో కూడిన పంపిణి మిగిలిన అన్ని వేరియబుల్స్ యొక్క విలువలపై ఆధారపడి ఉంటుంది.
- షరతులతో కూడిన సంభావ్యత యొక్క సంజ్ఞామానం పాఠ్యపుస్తకం నుండి పాఠ్యపుస్తకానికి మారుతూ ఉంటుంది. అదేవిధంగా అన్ని సంజ్ఞామానాలలో మనం సూచిస్తున్న సంభావ్యత మరొక సంఘటనపై ఆధారపడి ఉంటుంది.
- షరతులతో కూడిన సంభావ్యతలో ఒక ప్రామాణిక డెక్ కార్డు గురించి అందులోని కార్డులను గురించి పూర్తిగా తెలుసుకొనుటకు ఉపయోగపడుతుంది.

9.1. పరిచయం :

సంభావ్యత సిద్ధాంతం మరియు గణాంకాలలో, రెండు సంయుక్తంగా పంపిణి చేయబడిన యాదృచ్ఛిక చలంకాలు ఇవ్వబడ్డాయి. X మరియు Y, షరతులతో కూడిన సంభావ్యత పంపిణి Y ఇచ్చిన X యొక్క సంభావ్యత పంపిణి. Y ఎల్లప్పుడూ X ఒక నిర్దిష్ట విలువ అని పిలుస్తారు. కొన్ని సందర్భాలలో షరతులతో కూడిన సంభావ్యతలు పేర్కొనబడని విలువను కలిగి ఉన్న ఫంక్షన్‌లుగా వ్యక్తీకరించబడతాయి. x యొక్క X ఒక పరామితిగా, రెండు ఉన్నప్పుడు X మరియు Y వర్గీకరణ చలంకాలు, షరతులతో కూడిన సంభావ్యత పట్టిక సాధారణంగా షరతులతో కూడిన సంభావ్యతను సూచించడానికి ఉపయోగించబడుతుంది. షరతులతో కూడిన పంపిణి యాదృచ్ఛిక చలంకం యొక్క ఉపాంత పంపిణితో విభేదిస్తుంది. ఇది ఇతర చలంకాల విలువతో సంబంధం లేకుండా పంపిణి చేయబడుతుంది.

9.2. షరతులతో కూడిన సంభావ్యత అనగానేమి :

ఒక ప్రామాణిక డెక్ కార్డు నుండి డ్రా అయిన కార్డు ఒక రాజు అని సంభావ్యతను గుర్తించడం ఒక సూటివైన లెక్కింపు. మొత్తం 52 కార్డులలో మొత్తం '4' రాజులు ఉంటాయి. అందువలన సంభావ్యత కేవలం 4/52. ఈ గణనకు సంబంధించి ఈక్రింది ప్రశ్న ఏమిటంటే, మేము ఇప్పటికే డెక్ నుండి కార్డును డ్రా చేసినందుకు ఇచ్చిన ఒక రాజును డ్రా చేసుకునే సంభావ్యత ఏమిటి మరియు ఇది "ఆసు" గా ఉంది ? ఇక్కడ మేము డెక్ కార్డుల విషయాలను పరిశీలిస్తాము.

ఇప్పటికే నలుగురు రాజులున్నారు. కాని ఇప్పుడు డెక్లో '51' కార్డులు మాత్రమే ఉన్నాయి. ఒక ఏస్ ఇప్పటికే డ్రా అయిన ఇచ్చిన రాజు గీయడం సంభావ్యత 4/51 ఉంటుంది. ఈ గణన నియత సంభావ్యతకు ఒక ఉదాహరణ, షరతు సంభావ్యత మరొక సంఘటనకు సంబంధించిన ఒక ఈవెంట్ యొక్క సంభావ్యతగా నిర్వచించబడినది. ఈ సంఘటనలు 'A' మరియు 'B' అని పేరు పెడితే, ఇచ్చిన 'B' యొక్క సంభావ్యత గురించి వివరించవచ్చును. అదేవిధంగా 'B' పైన ఆధారపడిన సంభావ్యతను కూడా సూచిస్తారు.

9.3. నోటేషన్ :

నిబంధన సంభావ్యతకు సంజ్ఞామానం పాఠ్య పుస్తకం నుండి పాఠ్య పుస్తకం వరకు మారుతుంది. అన్ని సంజ్ఞానలో, మనం ప్రస్తావించే సంభావ్యత మరొక సంఘటన పై ఆధారపడి ఉంటుంది. ఇచ్చి 'B' యొక్క సంభావ్యతకు అత్యంత సాధారణ సంజ్ఞల్లో ఒకటి P(A), (A/B) P(A/B), పి బి (ఎ) అనే మరొక సంజ్ఞామానం.

9.4. ఫార్ములా :

A మరియు B యొక్క సంభావ్యతకు అనుసంధానించే నియత సంభావ్యతకు సూత్రం ఉన్న అది:

$$P(A/B) = P(A \cap B) / P(B).$$

ఈ ఫార్ములా ఏమి చేబుతుందో చెప్పడం అనేది సంఘటన యొక్క నియత సంభావ్యతను లెక్కించేందుకు B ఇచ్చిన సంఘటన B, మన నమూనా మాత్రమే సెట్ B ను కలిగి ఉంటుంది. ఈవిధంగా చేయుటకు, మనం కూడా A ను మాత్రమే పరిగణించుము. కాని A లోని భాగం కూడా B లో కూడా ఉంటుంది. దీనిలో వివరించిన సమితి A మరియు B యొక్క ఖండన లాంటి మరింత తెలిసిన పదాలతో గుర్తించవచ్చును. అదేవిధంగా పై సూత్రాన్ని వేరేవిధంగా వ్యక్తీకరించడానికి మనం బీజగణితాన్ని ఉపయోగించవచ్చును.

$$P(A \cap B) = P(A/B)\ P(B).$$

ఉదాహరణ 1:

ఈ సమాచారం వెలుగుతో మనం ప్రారంభించిన ఉదాహరణను మనం మళ్ళీ చూస్తాం. మనం ఆసు ముక్కను గతంలో తీసుకున్న రాజును గీయం యొక్క సంభావ్యతను తెలుసుకోవాలని కోరుకుంటున్నారు. ఆవిధంగా ఈవెంట్ A మనం పై ఒక డ్రా ఉంటుంది. ఈవెంట్ B కూడా ఒక (ఏస్) డ్రా గా ఉన్నది.

రెండు సంఘటనలు జరిగే సంభావ్యత మరియు మనం ఒక ఆసును గీయగలము మరియు తరువాత రాజు $P(A \cap B)$ కు అనుగుణంగా ఉంటుంది. ఈ సంభావ్యత విలువ **12/2652**. ఈవెంట్ B యొక్క సంభావ్యత, మనం ఒక ఆసును గీయడం **4/52**. అందుచే మనం నియత సంభావ్యత ఫార్ములాని వాడతాము మరియు ఆసుల కన్నా ఇచ్చిన రాజు గీయడం యొక్క సంభావ్యత **(16/2652) / (4/52) = 4/51.**

ఉదాహరణ 2:

మరొక ఉదాహరణ కోసం, మనం రెండు పాచికలు వెళ్ళడానికి సంభావ్యత ప్రయోగం చూద్దాం. మనం అడిగే ప్రశ్న ఏమిటంటే, మేము ఆరు కంటే తక్కువ మొత్తాన్ని తయారు చేశామని మనం ఇచ్చిన మూడు సంభావ్యతలు ఏమిటి ?

ఇందులో ఈవెంట్ A లో ఒక మూడు గాయాలైనవి మరియు ఈవెంట్ B ను ఆరు కంటే తక్కువ మొత్తం దెబ్బతిన్నది అని ఉన్నది. రెండు పాచికలు చుట్టడానికి మొత్తం **'36'** మార్గాలున్నాయి. ఈ **'36'** మార్గాలలో, **10** మార్గాలలో ఆరు కంటే తక్కువ మొత్తాన్ని రోల్ చేయడం.

→ $1 + 1 = 2$

→ $1 + 2 = 3$

→ $1 + 3 = 4$

→ $1 + 4 = 5$

→ $2 + 1 = 3$

→ $2 + 2 = 4$

→ $2 + 3 = 5$

→ $3 + 1 = 4$

→ $3 + 2 = 5$

→ $4 + 1 = 5$

ఆరు కంటే తక్కువ మొత్తాన్ని రోల్ చేయడానికి ఒక మార్గానికి నాలుగు మార్గాలున్నాయి. కాబట్టి సంభావ్యత $P(A \cap B) = 4/36$. మనం కోరుకున్నట్లయితే నియత సంభావ్యత $(4/36) / (10/36) = 4/10$.

9.5. జాగ్రత్తలు :

ఏ ఇతర సంఘటనలపై ఆధారపడి ఉన్నదో గుర్తించడానికి చాలా జాగ్రత్తగా ఉండాలి. సాధారణంగా P(A/B) P(B/A) లకు సమానం కాదు. ఇచ్చిన సంఘటన B యొక్క సంభావ్యత A కి ఇచ్చిన సంభావ్యత అదే కాదు.

పైన వివరింపబడిన ఉదాహరణలలో మనం రెండు పాచికలను రోలింగ్ చేస్తున్నప్పుడు, మూడు కన్నా రోలింగ్ సంభావ్యత, ఆరు కంటే తక్కువ మొత్తాన్ని తీసుకోవడం జరిగింది. మరోవైపు, ఆరు కంటే తక్కువ మూడు మరియు ఒక మొత్తం రోలింగ్ సంభావ్యత 4/36. కాబట్టి ఈ సందర్భంలో నియత సంభావ్యత $(4/36) / (11/36) = 4/11$.

9.6. విశ్లేషణ :

షరతులతో కూడిన పంపిణి ఉంటే Y ఇచ్చిన X అనేది నిరంతర పంపిణి, అప్పుడు దాని సంభావ్యత సాంద్రత ఫంక్షన్‌కి షరతులతో కూడిన సాంద్రత ఫంక్షన్ అంటారు. ముఖ్యంగా క్షణాలు లాంటి షరతులతో కూడిన సగటు మరియు షరతులతో కూడిన వ్యత్యాసం లాంటి సంబంధిత పేర్లతో సూచించబడతాయి.

సాధారణంగా ఒకటి కంటే ఎక్కువ రెండు చలంకాలు యొక్క ఉప సమితి యొక్క షరతులతో కూడిన పంపిణిని సూచించవచ్చును. ఈ షరతులతో కూడిన పంపిణి మిగిలిన అన్ని చలంకాల యొక్క విలువలపై ఆధారపడి ఉంటుంది మరియు ఉప సమితిలో ఒకటి కంటే ఎక్కువ చలంకాలు చేర్చబడితే, ఈ షరతులతో కూడిన పంపిణి అనేది చేర్చబడిన చలంకాల యొక్క షరతులతో కూడిన ఉమ్మడి పంపిణి.

9.7. షరుతులతో కూడిన వివిక్త పంపిణీలు :

వివిక్త యాదృచ్ఛిక చలంకాల కోసం షరతులతో కూడిన సంభావ్యత ద్రవ్యరాశి ఫంక్షన్ Y ఇచ్చిన X= x దాని నిర్వచనం ప్రకారం వ్రాయవచ్చును.

$$PY / X(y/x) \triangleq P(Y = y / X = x) = \frac{P(\{X = x\} \cap \{Y = y\})}{P(X = x)}$$

సంభవించిన కారణంగా $P(X = x)$హారంలో, ఇది సున్నా కాని వాటికి మాత్రమే నిర్వచించబడినది. అందుకే ఖచ్చితంగా పాజిటవ్ $P(X = x)$.

యొక్క సంభావ్యత పంపిణితో సంబంధం X ఇచ్చిన Y ఉన్నది.

$$P(Y = y / X = x)P(X = x) = P = (\{X = x\})$$

ఉదాహరణ:

ఫెయిర్ డ్తి అండ్ లెట్ యొక్క రోల్‌ను పరిగణించండి X = 1 సంఖ్య సమానంగా ఉంటే (అంటే 2, 4 లేదా 6) మరియు X = 0 లేకుంటే, ఇంకా వీలు Y = 1 సంఖ్య ప్రధానమైనట్లయితే (అంటే 2, 3 లేదా 5) మరియు Y = 0 లేకుంటే.

పట్టిక-1

డి	1	2	3	4	5	6
X	0	1	0	1	0	1
Y	0	1	1	0	1	0

అప్పుడు షరతులు లేని సంభావ్యత ఇది X = 13/6 = 1/2 (డై యొక్క ఆరు సాధ్యమైన రోల్స్ ఉన్నాయి, వాటిలో మూడు సమానంగా ఉంటాయి). అయితే సంభావ్యత X = 1 షరతులతో కూడినది Y = 1 $\frac{1}{3}$ (ఎందుకంటే మూడు ప్రధాన సంఖ్యల రోల్స్ - 2, 3 మరియు 5).

9.8. షరుతులతో కూడిన నిరంతర పంపిణీలు :

అదేవిధంగా నిరంతర యాదృచ్ఛిక చలంకం కోసం, షరతులతో కూడిన సంభావ్యత సాంద్రత ఫంక్షన్ Y విలువ సంభవించిన కారణంగా x యొక్క X ఇలా వ్రాయవచ్చును.

$$f\ Y/X(y/x)=\frac{f\ X,Y(x,y)}{f\ X(x)}$$

ఎక్కడ f X, Y (x, y) యొక్క ఉమ్మడి సాంద్రతను ఇస్తుంది. X మరియు Y, అయితే f X(x) కోసం ఉపాంత సాంద్రతను ఇస్తుంది X. ఈ సందర్భంలో కూడా ఇది అవసరం $fX(x)>0$.

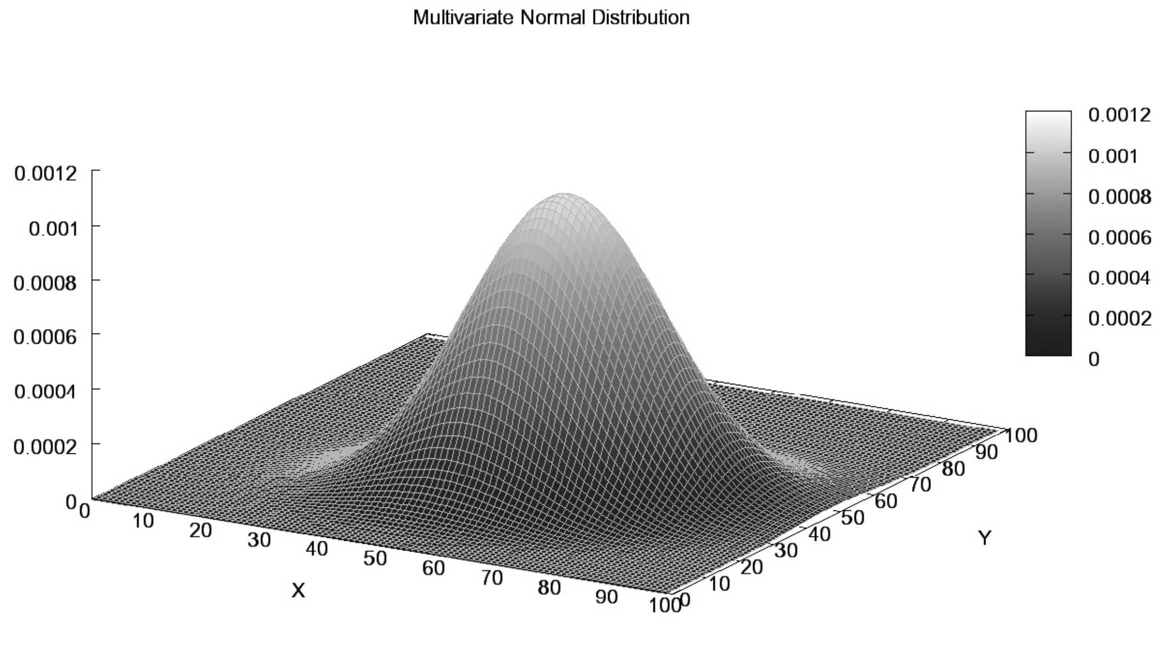
యొక్క సంభావ్యత పంపిణితో సంబంధం X ఇచ్చిన Y ద్వారా ఇవ్వబడినది.

$$f\ Y/X(y/x)f\ X(x)=fX,Y(x,y)=fX/Y(x/y)$$

నిరంతర యాదృచ్ఛిక చరరాశి యొక్క షరతులతో కూడిన పంపిణి యొక్క భావన అది కనిపించినంత సహజమైనది కాదు. బొరెల్ యొక్క వైరుధ్యం నియత సంభావ్యత సాంద్రత విధులు సమన్వయ పరివర్తనల క్రింద మార్పు లేనివి కానవసరం లేదని చూపిస్తుంది.

ఉదాహరణ:

రేఖా చిత్రం-1



ద్విపద సాధారణ ఉమ్మడి సాంద్రత

పై రేఖా చిత్రంలో గ్రాఫ్ యాదృచ్ఛిక చలంకాల కోసం ద్విపద సాధారణ ఉమ్మడి సాంద్రతను చూపుతుంది. X మరియు Y పంపిణిని చూడటానికి Y షరతులతో కూడినది X = 70, ఒకరు ముందుగా లైన్‌ను దృశ్యమానం చేయవచ్చును. X = 70 లో X, Y విమానం, ఆ పై ఆ రేఖను కలిగి ఉన్న మరియు లంబంగా ఉన్న విమానాన్ని దశ్యమానం చేయండి. X, Y విమానం ఉమ్మడి సాధారణ సాంద్రతతో ఆ విమానం యొక్క ఖండన, ఖండన క్రింద యూనిట్ ప్రాంతాన్ని ఇవ్వడానికి ఒకసారి రీస్కేల్ చేయబడితే, సంబంధిత షరతులతో కూడిన సాంద్రత Y.

$$Y / X = 70 \sim N(N_1 + \frac{1}{\sigma^2} P(70 - N_2), (1 - P^2)\sigma_1^2$$

9.9. స్వతంత్ర ఈవెంట్ :

ఇచ్చిన సంఘటన యొక్క నియత సంభావ్యత A యొక్క సంభావ్యతకు సమానంగా ఉన్న కొన్ని సందర్భాలలో ఉంటాయి. ఇలాంటి పరిస్థితులలో మనం A మరియు B సంఘటనలు ఒకదానితో ఒకటి స్వతంత్రంగా ఉన్నాయని చెపుతారు.

సూత్రం: $P(A/B) = P(A) = P(A \cap B) / P(B)$.

మరియు స్వతంత్ర కార్యక్రమాల కోసం అన్ని సంఘటనల యొక్క సంభావ్యతలకు సమానంగా ఉన్న కొన్ని సందర్భాలలో ఉన్నాయి. ఈ విధమైన పరిస్థితులలో మనం A మరియు B సంఘటనలు ఒకదానితో ఒకటి స్వతంత్రంగా ఉన్నాయని అనుకున్నప్పుడు సూత్రం ఈవిధంగా ఉంటుంది. సందర్భాలలో ఉన్నాయి.

$$P(A \cap B) = P(B)\ P(A).$$

రెండు సంఘటనలు స్వతంత్రంగా ఉన్నప్పుడు, దీని అర్థం ఒక సంఘటన మరొక దానిపై ప్రభావం చూపదు. ఒక నాణేన్ని కదల్చడం మరియు మరొకదాని స్వతంత్ర సంఘటనలకు ఉదాహరణ.

9.10. లక్షణాలు :

షరతులతో కూడిన యాదృచ్ఛిక చలంకం యొక్క విధిగా చూడబడింది. y ఇచ్చిన కోసం $x, P(Y = y / X = x)$ ఒక సంభావ్యత మాస్ ఫంక్షన్ మరియు మొత్తం మీద y (లేదా అది షరతులతో కూడిన సంభావ్యత సాంద్రత అయితే సమగ్రమైనది). 1 యొక్క విధిగా చూపబడుతుంది. x ఇచ్చిన కోసం y, ఇది సంభావ్యత ఫంక్షన్, కాబట్టి మొత్తం మీద x_1 కానవసరం లేదు. అదనంగా ఉమ్మడి పంపిణి యొక్క ఉపాంత సంబంధిత షరతులతో కూడిన పంపిణి యొక్క నిరీక్షణగా వ్యక్తీకరించవచ్చు.

ఉదాహరణ: → $PX(x) = EY[PX / Y(X / Y)]$.

9.11. కొలత సిద్ధాంత సూత్రీకరణ :

వీలు (Ω, F, P) ఒక సంభావ్యత స్థలం, $\zeta \underline{C} F d\sigma$ ఫిల్డ్‌లో F ఇచ్చిన A∈F, రాడాన్ నికోడిమ్ సిద్ధాంతం ఉన్నట్లు సూచిస్తుంది. $\partial\zeta$ కొలతగల మాదృచ్ఛిక చలంకం $P(A/\zeta):\Omega \rightarrow R$, షరతులతో కూడిన సంభావ్యత అని పిలుస్తారు. అలాంటిది

$$\int_G P(A/\zeta)(w)dp(w) = P(A \cap G)$$

ప్రతి కోసం $G \in \zeta$, మరియు అటువంటి యాదృచ్ఛిక చలంకం సంభావ్యత సున్నా సెట్ల వరకు ప్రత్యేకంగా నిర్వచించ బడుతుంది. షరతులతో కూడిన సంభావ్యతను రెగ్యులర్ అని పిలుస్తారు. P(./B)(W) అనేది సంభావ్యత కొలత (Ω, F) అందరి కోసం $W \in \Omega$ ae

9.12. షరతులతో కూడిన నిరీక్షణకు సంబంధం :

ఏదైనా ఈవెంట్ కోసం A∈F, సూచిక ఫంక్షన్ నిర్వచించండి.

$$1A(w) = \alpha_{0 \ if \ w \notin A}^{1 \ if \ w \in A}$$

ఇది యాదృచ్ఛిక వేరియంట్, ఈ యాదృచ్ఛిక చలంకం యొక్క నిరీక్షణ A యొక్క సంభావ్యతకు సమానంగా ఉంటుందని గమనించబడును.

$$E(1A) = P(A)$$

సాధారణ షరతులతో కూడిన సంభావ్యతకు సంబంధించి యాదృచ్ఛిక చలకం యొక్క నిరీక్షణ దాని నియత నిరీక్షణకు సమానం.

9.13. ముగింపు :

ఈ సిద్ధాంతం ముఖ్యంగా ఒక ప్రామాణిక డెక్ కార్డు నుండి డ్రా అయిన కార్డు ద్వారా ఏ విధంగా లెక్కించవచ్చునో తెలియజేస్తుంది. నోటేషన్ యొక్క నిబంధన సంభావ్యతకు సంజ్ఞామానం పాఠ్యపుస్తకం నుండి పాఠ్యపుస్తకం వరకు మారుతుంది. షరతులతో కూడిన సంభావ్యత వివిధ ఉదాహరణల ద్వారా వివరించబడినది. ముఖ్యంగా ఈ విశ్లేషణలో సంభావ్యత సిద్ధాంతం మరియు గణాంకాలలో రెండు సంయుక్తంగా పంపిణి చేయబడిన యాదృచ్ఛిక చలంకాల పంపిణిని వివరించుట జరిగినది. షరుతులతో కూడిన పంపిణి ఉన్నట్లయితే నిరంతరంగా పంపిణి ద్వారా తెలియజేయబడుతుంది. అదేవిధంగా నిరంతర యాదృచ్ఛిక చలంకం కోసం షరతులతో కూడిన సంభావ్యత సాంద్రత ఫంక్షన్ ద్వారా వివరించ బడుతుంది.

9.14. మాదిరి పరీక్ష ప్రశ్నలు :

I వ్యాసరూప ప్రశ్నలు :

1. షరతులతో కూడిన సంభావ్యత అనగానేమి ? వివరించండి ?
2. షరతులతో కూడిన సంభావ్యత యొక్క అంశాలను ఉదాహరణల ద్వారా తెలియజేయండి ?

II సంక్షిప్త వ్యాసరూప ప్రశ్నలు :

1. షరతులతో కూడిన వివిధ పంపిణిలను వివరించండి ?
2. షరతులో కూడిన సంభావ్యతను వివిధ ఉదాహరణల ద్వారా వివరించండి ?

III సంక్షిప్త ప్రశ్నలు :

1. ఫార్ములా అనగానేమి ?
2. స్వతంత్ర్య ఈవెంట్‌లు అనగానేమి ?
3. నిరీక్షణ సంబంధం ?

9.15. ఆధార గ్రంథాలు :

1. రాస్, షెల్డన్ M (1993). సంభావ్యత నమూనాల పరిచయం. (ఐదవ ఎడిషన్), శాన్ డియాగో: అకడకిమ్ ప్రెస్, పేజీలు 88-91.
2. పార్క్, కున్ ఇల్ (2018). కమ్యూనికేషన్‌లకు అప్లికేషన్లతో సంభావ్యత మరియు యాదృచ్ఛిక ప్రక్రియల ప్రాథమిక అంశాలు, స్ప్రింగర్.
3. బిల్లింగ్, పాట్రిక్ (1995). సంభావ్యత మరియు కొలత. (3వ ఎడిషన్) న్యూయార్క్, NY : జాన్ విలే అండ్ సన్స్.
4. విలియం ఫెల్లర్ (1950). యాన్ ఇంట్రడక్షన్ టూ ప్రొబబిలిటి థియరి అండ్ ఇట్స్ అప్లికేషన్స్. వాల్యూం 1, 1950. P. 223.
5. పాల్ A. మెయర్ (1966). ప్రొబబిలిటి అండ్ పొటేన్షియల్. బ్లాస్ డిల్ పబ్లిషింగ్ కం. P. 28.
6. గిర్ మిట్, గ్రొమెర్రి, స్టిజేకర్, డెవిడ్ (2001). ప్రొబబిలిటి అండ్ ర్యాండమ్ ప్రాసెస్. (3వ ఎడిషన్) ఆక్స్‌ఫర్డ్ యూనివర్శిటి ప్రెస్. PP. 67-69.

పాఠం - 10

బేయెస్ సిద్ధాంతం

BAYES THEOREM

పాఠ్య నిర్మాణ క్రమం :

10.0. ఉద్దేశ్యాలు

10.1. పరిచయం

10.2. బేయెస్ సిద్ధాంతం చరిత్ర

10.3. బేయెస్ సిద్ధాంతం యొక్క ప్రకటన

10.4. ఈవెంట్స్ కోసం

10.5. నిరంతర యాదృచ్ఛిక వేరియబుల్స్ కోసం

10.6. బేయెస్ సిద్ధాంతం ఈక్రింది ఉదాహరణల ద్వారా వివరించవచ్చును

10.6.1. వినోద గణితం

10.6.2. ఔషధ పరీక్ష

10.6.3. క్యాన్సర్ రేటు

10.6.4. లోప భూయిష్టమైన ఉత్పత్తి రేటు

10.7. ప్రతిపాదన తర్కం

10.8. సబ్జెక్టివ్ లాజిక్

10.9. బేయెస్ సిద్ధాంతం-జన్యు శాస్త్రం

10.10. ప్రమాద కారకాల గుర్తింపు-జన్యు పరీక్ష

10.11. ముగింపు

10.12. మాదిరి పరీక్ష ప్రశ్నలు

10.13. ఆచూకి గ్రంధాలు

10.0. ఉద్దేశాలు :

- బేయెస్ సిద్ధాంతం ప్రకారం వైద్య పరీక్షల యొక్క ఖచ్చితత్వాన్ని అంచనా వేయుటకు ఈ సిద్ధాంతం ఉపయోగపడుతుంది.
- బేయెస్ సిద్ధాంతం ప్రకారం ఒక ప్రాంతంలో ఆరోగ్య సర్వే చేస్తున్నప్పుడు వివిధ రకాలైన వ్యాధులు ఉన్నవారు అనుకూల ఫలితాలను అందుకుంటారు. కొంతశాతంథ ఈ సర్వే ఫలితాలలో వ్యతిరేఖ ఫలితాలు పొందుతారు. వీటిని తెలుసుకొనుటకు ఈ సిద్ధాంతం ఉపయోగపడుతుంది.
- వివిధ పరిశ్రమలలో లోపభూయిష్టమైన ఉత్పత్తి రేటును కనుగొనుటకు ఈ సిద్ధాంతం ఉపయోగపడుతుంది.
- బేయెస్ సిద్ధాంతం చాలా మంది వ్యక్తులు జన్యుపరమైన వ్యాధులకు ప్రభావితం అయ్యే అవకాశాలను లేదా ఆశక్తిని కలిగించేందుకు ఈ సిద్ధాంతం ఉపయోగపడుతుంది.

ా10.1. పరిచయం:

సంభావ్యత సిద్ధాంతం మరియు గణాంకాలలో, బేయెస్ సిద్ధాంతం (ప్రత్యామ్నాయంగా బేయెస్ చట్టం లేదా బేయెస్ నియమం లేదా బేయెస్ ధర సిద్ధాంతం) అని అంటారు. దీనికి థామస్ బేయెస్ మొట్టమొదట ప్రవేశ పెట్టారు. కాబట్టి థామస్ బేయెస్ పేరు పెట్టారు. ఇది ఒక సంఘటన యొక్క సంభావ్యతను వివరిస్తుంది. ముఖ్యంగా సిద్ధాంతం ఆధారితంగా పనికి సంబంధించిన పరిస్థితుల గురించి ముందుగా తెలుసుకోవడం. ఉదాహరణకు, ఆరోగ్య సమస్యలను అభివృద్ధి చేసే ప్రమాదం వయస్సుతో పెరుగుతుందని తెలిసినట్లయితే, బేయెస్ సిద్ధాంతం తెలిసిన వయస్సులో ఉన్న వ్యక్తికి ప్రమాదాన్ని మరింత ఖచ్చితంగా అంచనా వేయడానికి అనుమతిస్తుంది.

బేయెస్ సిద్ధాంతం యొక్క అనేక అనువర్తనాల్లో ఒకటి బయేసియన్ అనుమతి, ఇది గణాంక అనుమతికి ఒక ప్రత్యేక విధానం వర్తింప చేసినప్పుడు, సిద్ధాంతంలో ఉన్న సంభావ్యతలు వేర్వేరు సంభావ్యత వివరణతో, సిద్ధాంతం సంభావ్యతగా వ్యక్తీకరించబడిన నమ్మకం, సంబంధిత సాక్ష్యాల లభ్యత కోసం హేతుబద్ధంగా ఎలా మారాలి అనే విషయాన్ని వ్యక్తీకరిస్తుంది.

10.2. బేయెస్ సిద్ధాంతం చరిత్ర :

బేయెస్ సిద్ధాంతానికి "రెవరెండ్ థామస్ బేయెస్" పేరుపెట్టారు. బేయెస్ మొదటగా ఒక అల్గారిథమ్ అందించడానికి షరతులతో కూడిన సంభావ్యతను ఉపయోగించారు. ఇది తెలియని పరామితిపై పరిమితులను లెక్కించడానికి సాక్ష్యాలను ఉపయోగిస్తుంది. డాక్ట్రిన్ ఆఫ్ చాన్సెస్ (1763) లో ఒక సమస్యను పరిష్కరించడానికి ఒక వ్యాసంగా బైనామియల్ పంపిణి యొక్క సంభావ్యత పరిమితి కోసం పంపిణీని ఎలా గణించాలో అధ్యమనం చేశాడు.

బేయెస్ ప్రధాన రచన అవకాశాల సిద్ధాంతంలో ఒక సమస్య పరిష్కరం దిశగా ఒక వ్యాసం 1763వ సంవత్సరంలో వ్రాశారు. బేయెస్ నుండి స్వతంత్రంగా, 1774 వ సంవత్సరంలో పియరీ సైమన్ లాప్లేస్ మరియు తరువాత అతని 1812వ సంవత్సరం థియరీ ఎనలిటిక్డెస్ సంభావ్యతలో, సాక్షం ఇచ్చిన ముందస్తు సంభావ్యత నుండి ఆధునికరించిన పృష్ట సంభావ్యత

యొక్క సంబంధాన్ని రూపొందించడానికి షరతులతో కూడిన సంభావ్యత ఉపయోగించారు. ముఖ్యంగా సంభావ్యత యొక్క బయేసియస్ వివరణ ప్రధానంగా లాప్లేస్ ద్వారా అభివృద్ధి చేయబడినది.

సర్ హెరాల్డ్ జెఫ్రెన్ బేయెస్ యొక్క అల్గారిథమ్ మరియు లాప్లేన్ సుత్రీకరణను ఒక అక్షర సంబంధమైన ప్రాతిపదికన ఉంచారు. బేయెస్ సిద్ధాంతం పైథాగరియన్ సిద్ధాంతం జ్యామితికి సంబంధించిన సంభావ్యత సిద్ధాంతానికి అని వ్రాశారు.

10.3. బేయెస్ సిద్ధాంతం యొక్క ప్రకటన :

బేయెస్ సిద్ధాంతం గణిత శాస్త్రంగా ఈ క్రింది సమీకరణంగా చెప్పబడినది.

$$P(A/B) = \frac{P(B/A)P(A)}{P(B)}.$$

$P(A/B)$ షరతులతో కూడిన సంభావ్యత. దీని యొక్క సంభావ్యత A అది ఇచ్చిన సంభవిస్తుంది. B నిజమే. దీనిని పృష్ట సంభావ్యత అని కూడా అంటారు. A ఇచ్చిన B.

$P(B/A)$ షరతులతో కూడిన సంభావ్యత కూడా ఈవెంట్ యొక్క సంభావ్యతగా కూడా అర్థం చేసుకోవచ్చును. A స్థిరంగా ఇవ్వబడినది. B ఎందుకనగా $P(B/A) = L(A/B)$.

P(A) మరియు P(B) పరిశీలన యొక్క సంభావ్యత A మరియు B ఏ విధమైన షరతులు లేకుండా వరుసగా వాటిని ఉపాంత సంభావ్యత లేదా ముందస్తు సంభావ్యత అని కూడా పిలుస్తారు.

A మరియు B విభిన్న సంఘటనలుగా ఉండాలి.

10.4. ఈవెంట్స్ కోసం :

బేయెస్ సిద్ధాంతం షరతులతో కూడిన సంభావ్యత యొక్క నిర్వచనం నుండి తీసుకోవచ్చును. అవి:

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \quad \text{అయితే} \quad P(B) \neq 0,$$

ఎక్కడ $P(A \cap B)$ A మరియు B రెండూ నిజం అయ్యే సంభావ్యత. అదేవిధంగా,

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \text{ అయితే } P(A) \neq 0,$$

కోసం పరిష్కరిస్తున్నారు. $P(A \cap B)$ మరియు పైన పేర్కొన్న వ్యక్తీకరణకు ప్రత్యామ్నాయం $P(A/B)$ బేయెస్ సిద్ధాంతాన్ని ఇస్తుంది.

$$P(A/B) = \frac{P(B/A)P(A)}{P(B)} \text{ అయితే } P(B) \neq 0.$$

10.5. నిరంతర యాదృచ్ఛిక వేరియబుల్స్ కోసం :

రెండు నిరంతర యాదృచ్ఛిక వేరియబుల్స్ X మరియు Y కోసం, బేయెస్ సిద్ధాంతం షరతులతో కూడిన సాంద్రత యొక్క నిర్వచనం నుండి సాదృశ్యంగా ఉద్భవించవచ్చును.

$$f\ X/Y = y(x) = \frac{f\ X,Y(x,y)}{f\ Y(y)}$$

$$f\ Y/X = x(y) = \frac{f\ X,Y(x,y)}{f\ X(x)}$$

అందువలన $$f\ X/Y = f\ Y/X = \frac{x(y) f\ X(x)}{f\ Y(y)}$$

10.6. బేయెస్ సిద్ధాంతం ఈ క్రింది ఉదాహరణల ద్వారా వివరించవచ్చును :

బేయెస్ సిద్ధాంతం యొక్క ముఖ్యమైన ఉదాహరణల ద్వారా వివరించవచ్చును. అవి:

10.6.1. వినోద గణితం :

బేయెస్ నియమం మరియు కంప్యూటింగ్ షరతులతో కూడిన సంభావ్యతలు ముగ్గురి ఖైదీల సమస్య, యాంటి హోల్ సమస్య, ఇద్దరు పిల్లల సమస్య మరియు రెండు ఎన్వలప్‌ల సమస్య లాంటి అనేక ప్రసిద్ధ పజిల్‌లకు పరిష్కార పద్ధతి అని అందిస్తాయి.

10.6.2. ఔషధ పరీక్ష :

ఎవరైనా గంజాయిని ఉపయోగిస్తున్నారా లేదా అనే దానికి ఒక నిర్దిష్ట పరీక్ష 90.0 శాతం సున్నితమైనది. అంటే నిజమైన సానుకూల రేటు (TPR) = 0.90 శాతం. అందువలన ఇది గంజాయి వినియోగదారులకు 90.0 శాతం నిజమైన సానుకూల ఫలితాలకు (మాదక ద్రవ్యాల వినియోగం యొక్క సరైన గుర్తింపు) దారితీస్తుంది.

పరీక్ష కూడా 80.0 శాతం నిర్దిష్టంగా ఉంటుంది. అంటే నిజమైన ప్రతికూల రేటు (TNR) = 0.80 శాతం. అందువలన పరీక్ష వినియోగదారులు కాని వారి కోసం ఉపయోగించదని 80.0 శాతం సరిగ్గా గుర్తిస్తుంది. కాని వినియోగదారులు కాని వారికి 20.0 శాతం తప్పుడు పాజిటివ్ రేటు (FPR) = 0.20 ని కూడా ఉత్పత్తి చేస్తుంది.

0.05 వ్యాప్తిని ఊహిస్తే, అంటే 5.0 శాతం మంది వ్యక్తులు గంజాయిని ఉపయోగిస్తున్నారు. యాదృచ్ఛికంగా పాజిటివ్ పరీక్షించే వ్యక్తి నిజంగా గంజాయి వాడే సంభావ్యత ఎంత ?

పరీక్ష యొక్క పాజిటివ్ ప్రిడక్టివ్ వాల్యూ (PPV) అనేది పాజిటివ్ పరీక్షించిన వారందరిలో వాస్తవంగా సానుకూలంగా ఉన్న వ్యక్తుల నిష్పత్తి మరియు నమూనా నుండి ఈ విధంగా లెక్కించవచ్చును.

PPV = ట్రూ పాజిటివ్ / టెస్టెడ్ పాజిటివ్

సున్నితత్వం, నిర్దిష్టత మరియు ప్రాబల్యం తెలిసినట్లయితే బేయెస్ సిద్ధాంతాన్ని ఉపయోగించి PPV ని లెక్కించవచ్చును. వీలు P(User / Positive) అంటే, ఎవరైనా గంజాయి వాడే సంభావ్యత.

P (పాజిటివ్) = P (పాజిటివ్ / ఉపయోగించేవారు) P (ఉపయోగించేవారు) + P (పాజిటివ్ / ఉపయోగించనివారు) P (ఉపయోగించనివారు)

ఈ సందర్భంలో, ఎవరైనా పాజిటివ్‌ని పరీక్షించే సంభావ్యత, వినియోగదారులుగా ఉండే సంభావ్యత కంటే రెట్లు ఎక్కువ, అలాగే వినియోగదారు కాని వారు పాజిటివ్‌గా పరీక్షించే సంభావ్యత, వినియోగదారు కాని వారు సంభావ్యత రెట్లు ఎక్కువ అని ఇది చెబుతుంది. ఇది నిజం ఎందుకనగా వర్గీకరణలు వినియోగదారుడు మరియు వినియోగదారుడు కాని వారు ఒక సెట్ యొక్క విభజనను ఏర్పరుస్తాయి. మరోమాటలో చెప్పాలంటే, ఎవరైనా పాజిటివ్‌గా పరీక్షించినప్పటికి, వారు గంజాయి వాడే సంభావ్యత కేవలం 19.0 శాతం మాత్రమే. దీనికి కారణం ఈ గుంపులో కేవలం 5.0 శాతం మంది మాత్రమే వినియోగదారులుగా ఉన్నారు. మిగిలిన 95.0 శాతం నుండి వచ్చే తప్పుడు పాజిటివ్‌లు చాలా వరకు ఉన్నాయి.

10.6.3. క్యాన్సర్ రేటు :

ప్యాంక్రియాటిక్ క్యాన్సర్‌తో బాధపడుతున్న 100 శాతం మంది రోగులకు నిర్దిష్ట లక్షణం ఉన్నప్పటికి, ఎవరైన అదే లక్షణాన్ని కలిగి ఉంటే, ఆ వ్యక్తికి ప్యాంక్రియాటిక్ క్యాన్సర్ వచ్చే అవకాశం 100 శాతం ఉందని దీని అర్థం కాదు. ప్యాంక్రియాటిక్ క్యాన్సర్ సంభవం రేటు $\frac{1}{1,00,000}$ అని ఊహిస్తే, $\frac{10}{99,999}$ ఆరోగ్యవంతమైన వ్యక్తులు ప్రపంచవ్యాప్తంగా ఒకే లక్షణాలను కలిగి ఉన్నారు. లక్షణాలను బట్టి ప్యాంక్రియాటిక్ క్యాన్సర్ వచ్చే సంభావ్యత 9.1 శాతం మాత్రమే మరియు మిగిలిన 90.9 శాతం తప్పుడు పాజిటివ్‌లు కావచ్చు.

మీకు లక్షణాలు ఉన్నప్పుడు క్యాన్సర్ వచ్చే సంభావ్యతను లెక్కించడానికి ఇది ఉపయోగపడుతుంది.

$$P\,(\text{క్యాన్సర్}/\text{లక్షణాలు}) = \frac{P\,(\text{లక్షణాలు} / \text{క్యాన్సర్})\; P\,(\text{క్యాన్సర్})}{P\,(\text{లక్షణాలు})}$$

$$= \frac{P(\text{లక్షణాలు / క్యాన్సర్})\, P(\text{క్యాన్సర్})}{P(\text{లక్షణాలు / క్యాన్సర్})\, P(\text{క్యాన్సర్}) + P(\text{లక్షణాలు / లేనివారు})\, P(\text{క్యాన్సర్ లేని వారు})}$$

$$= \frac{1 \times 0.00001}{1 \times 0.00001 + (10/99{,}999) \times 0.99{,}999}$$

$$= \frac{1}{11}$$

$$\neq 9.1\%$$

10.6.4. లోప భూయిష్టమైన ఉత్పత్తి రేటు :

ఒక కర్మాగారం మూడు యంత్రాలు, A, B మరియు C లను ఉపయోగించి ఒక వస్తువును ఉత్పత్తి చేస్తుంది. ఇది వరుసగా 20.0%, 30.0% మరియు 50.0% ఉత్పత్తిని కలిగి ఉంటుంది. A యంత్రం ద్వారా ఉత్పత్తి చేయబడిన వస్తువులలో, 5% లోపభూయిష్టంగా ఉన్నాయి. అదేవిధంగా B యంత్రం యొక్క 3% అంశాలు మరియు C యంత్రంలో 1% లోపభూయిష్టంగా ఉన్నాయి. యాదృచ్ఛికంగా ఎంపిక చేయబడిన అంశం లోపభూయిష్టంగా ఉంటే, అది యంత్రం C ద్వారా ఉత్పత్తి చేయబడిన సంభావ్యత ఎంత?

మరోసారి షరతులను ఊహాత్మక సంఖ్యలో కేసులకు వర్తింపజేయడం ద్వారా సూత్రాన్ని ఉపయోగించకుండా సమాధానాన్ని చేరుకోవచ్చు.

ఉదాహరణకు, ఫ్యాక్టరీలో 1,000 వస్తువులను ఉత్పత్తి చేస్తే, యంత్రం A ద్వారా 200 వస్తువులు, B యంత్రం ద్వారా 300 వస్తువులు మరియు C యంత్రం ద్వారా 500 వస్తువులను ఉత్పత్తి చేయబడుతుంది. యంత్రం A ద్వారా 5% × 200 = 10, యంత్రం B 3% × 300 = 9, మరియు యంత్రం C 1% × 500 = 5, మొత్తం 24 వస్తువులు. కాబట్టి యాదృచ్ఛికంగా ఎంపిక చేయబడిన లోపభూయిష్ట అంశం యంత్రం C ద్వారా ఉత్పత్తి చేయబడే అవకాశం 5/24 (~20.83%).

ఈ సమస్యను బేయెస్ సిద్ధాంతాన్ని ఉపయోగించి కూడా పరిష్కరించవచ్చు. i^{th} యంత్రం (i = A, B, C కోసం) ద్వారా యాదృచ్ఛికంగా ఎంపిక చేయబడిన అంశం తయారు చేయబడిన సంఘటనను X_i ని సూచిస్తాయి. యాదృచ్ఛికంగా ఎంచుకున్న అంశం లోపభూయిష్టంగా ఉన్న సంఘటనను Y సూచించనివ్వండి. అప్పుడు ఈక్రింది సమాచారం అందించబడుతుంది.

$$P(X_A) = 0.2,\ P(X_B) = 0.3,\ P(X_C) = 0.5$$

మొదటి యంత్రం ద్వారా ఉత్పత్తి చేయబడితే, అది లోపభూయిష్టంగా ఉండే సంభావ్యత 0.05, అంటే $P(Y/X_A) = 0.05$ అవుతుంది.

$$P(Y/X_A) = 0.05,\ P(Y/X_b) = 0.03,\ P(Y/X_c) = 0.01$$

అసలు ప్రశ్నకు సమాధానమివ్వడానికి మొదటగా P(Y) కనుగొంటారు. దీనిని ఈక్రింది విధంగా చేయవచ్చును.

$$P(Y)=\sum_i P(Y/X_i)P(X_i)$$

$$= (0.05)(0.2) + (0.01)(0.5)$$

$$= 0.024$$

అందువలన, మొత్తం ఉత్పత్తిలో 2.4% లోపభూయిష్టకంగా ఉన్నది.

X_c యొక్క షరతులతో కూడిన సంభావ్యతను బేయెస్ సిద్ధాంతం ద్వారా ఈక్రింది విధంగా లెక్కించవచ్చును.

$$P(X_c/Y) = \frac{P(Y/X_c)P(X_c)}{P(Y)}$$

$$= \frac{(0.01)(0.50)}{0.024}$$

$$= \frac{5}{24}$$

యంత్రం C ద్వారా ఉత్పత్తి చేయబడిన సంభావ్యత 5/24. C యంత్రం ఉత్పత్తిలో సగం ఉత్పత్తి చేసినప్పటికీ, ఇది లోపభూయిష్ట వస్తువులలో చాలా తక్కువ భాగాన్ని ఉత్పత్తి చేస్తుంది. అందువలన ఎంచుకున్న అంశంల లోప భూయిష్టంగా ఉందని తెలుసుకోవడం వలన మిగిలిన సంభావ్యత $P(X_c)$ = 1/2 ని చిన్న సంభావ్యత $P(X_c/Y)$ = 5/24 ద్వారా భర్తీ చేయవచ్చును.

10.7. ప్రతిపాదన తర్కం :

బేయెస్ సిద్ధాంతం వ్యతిరేఖ స్థానం యొక్క సాధారణికరణను సూచిస్తుంది. దీనిని ప్రతిపాదిత తర్కంలో ఇలా వ్యక్తీకరించ వచ్చును.

$$(\neg A \to \neg B) \to (B \to A)$$

సంభావ్యత లెక్క ప్రకారం సంబంధిత సూత్రం బేయెస్ సిద్ధాంతం, దాని విస్తరించిన రూపంలో ఇలా వ్యక్తీకరించ బడినది.

$$P(A/B) = \frac{P(B/A)a(A)}{P(B/A)a(A) + P(B/\neg A)a(\neg A)}$$

షరతులతో కూడిన సంభావ్యత పైన ఉన్న సమీకరణంలో P(B/A) తార్కిక ప్రకటనను సాధారణికరిస్తుంది $(A \to B)$. అంటే తప్పు లేదా ఒప్పుని కేటాయించడంతో పాటు మనం స్టేట్‌మెంట్‌కు ఏదైనా సంభావ్యతను కూడా కేటాయించవచ్చు. పదం $'a'(A)$ యొక్క ముందస్తు సంభావ్యతను సూచిస్తుంది.

A అని అనుకోండి P(A/B) = 1 కి సమానం $(B \to A)$

నిజం మరియు అది $P(A/B)=0$ కు సమానం $(B \to A)$ తప్పుగా ఉండటం. అప్పుడు అది చూడటం సులభం.

$P(A/B)$ = 1 ఎప్పుడు $P(\neg B/\neg A)$ = 1 అంటే ఎప్పుడు $(\neg A \to \neg B)$ నిజం. ఇదీ దిని వలన అనగా $P(B/\neg A) = 1 - P(\neg B/\neg A) = 0$ ఎగువ సమీకరణం యొక్క కుడివైపున ఉన్న భిన్నం '1' కి సమానం కాబట్టి $P(A/B)$ = 1 సమానమైనది. $(B \to A)$ నిజం. అందువలన బేయెస్ సిద్ధాంతం వ్యతిరేఖత యొక్క సాధారణికరణను సూచిస్తుంది.

10.8. సబ్జెక్టివ్ లాజిక్ :

బేయెస్ సిద్ధాంతం ఆత్మాశ్రయ తర్కంలో విలోమ షరతులతో కూడిన అభిప్రాయాలను పొందే ప్రత్యేక సందర్భాన్ని సూచిస్తుంది.

$$\left(W^S_{A/B}, W^S_{A/\neg B}\right) = \left(W^S_{B/A}, W^S_{B/\neg A}\right)\phi^2 a_A$$

ఎక్కడ ϕ^2 షరతులతో కూడిన అభిప్రాయాలను తారుమారు చేయడానికి ఆపరేటర్‌ను సూచిస్తుంది. వాదన $\left(W^S_{B/A}, W^S_{B/\neg A}\right)$మూలం ద్వారా ఇవ్వబడిన ద్విపద షరతులతో కూడిన అభిప్రాయాల జతను సూచిస్తుంది. 'S' మరియు వాదన a_A యొక్క ముందస్తు సంభావ్యతను సూచిస్తుంది. A ఉత్పన్నమైన విలోమ షరతులతో కూడిన అభిప్రాయాల జత సూచించబడుతుంది.

$\left(W^S_{A/B}, W^S_{A/\neg B}\right)$ షరతులతో కూడిన అభిప్రాయాల జత సూచించబడుతుంది.

$\left(W_{A/B}^{S}, W_{A/B}^{S}\right)$షరతులతో కూడిన $\left(W_{A/B}^{S}\right)$సంభావ్యత షరతును సాధారణికరిస్తుంది. $P(A/B)$ అనగా సంభావ్యత మూలాన్ని కేటాయించడంతో పాటు 'S' షరతులతో కూడిన ప్రకటనను ఏదైనా ఆత్మాశ్రయ అభిప్రాయాన్ని కేటాయించవచ్చును.

10.9. బేయెస్ సిద్ధాంతం-జన్యు శాస్త్రం :

జన్యు శాస్త్రంలో ఒక నిర్దిష్ట జన్యు రూపాన్ని కలిగి ఉన్న వ్యక్తి యొక్క సంభావ్యతను లెక్కించడానికి బేయెస్ సిద్ధాంతం ఉపయోగించవచ్చును. ముఖ్యగా చాలా మంది వ్యక్తులు జన్యుపరమైన వ్యాధుల ద్వారా ప్రభావితమయ్యే అవకాశాలను లేదా ఆసక్తిని తగ్గించే జన్యువుకు క్యారియర్‌గా ఉండే సంభావ్యతను అంచనా వేయడానికి ప్రయత్నిస్తారు. కుటుంబ చరిత్ర లేదా జన్యుపరీక్ష ఆధారంగా ఒక విశ్లేషణ చేయవచ్చును. ఒక వ్యక్తి ఒక వ్యాధిని అభివృద్ధి చేస్తాడా లేదా వారి పిల్లలకు ఒక వ్యాధిని సంక్రమిస్తారా అని అంచనా వేయడానికి, జన్యు పరీక్ష మరియు అంచనా అనేది పిల్లలను కలిగి ఉండాలనుకునే జంటలలో ఒక సాధారణ అభ్యాసం, అయితే వారిద్దరు ఒక వ్యాధికి వాహకాలుగా ఉంటానని ఆందోళన చెందుతారు. ముఖ్యంగా తక్కువ జన్యు వైవిధ్యం ఉన్న సమాజాలలో

జన్యుశాస్త్రం కోసం బయేసియన్ విశ్లేషణ లో మొదటి దశ పరస్పరం ప్రత్యేకమైన పరికల్పనలను ప్రతిపాదించడం. ఒక నిర్దిష్ట యుగ్మ వికల్పం కోసం, ఒక వ్యక్తి క్యారియర్ (సంక్రమణ) లేదా కాదు. ఆ తరువాత 4 సంభావ్యతలు లెక్కించబడతాయి. పూర్వ సంభావ్యత దీనిలో కుటుంబ చరిత్ర లేదా మెండలియన్ వారసత్వం ఆధారంగా అంచనాలు లాంటి సమాచారాన్ని పరిగణనలోకి తీసుకునే ప్రతి పరికల్పన యొక్క సంభావ్యత, షరతులతో కూడిన సంభావ్యత ఇది ఒక నిర్దిష్ట ఫలితం ఉంటుంది. ఉమ్మడి సంభావ్యత మరియు పృష్టి సంభావ్యత (ప్రతి పరికల్పనకు ఉమ్మడి సంభావ్యతను రెండు ఉమ్మడి సంభావ్యతల మొత్తంతో విభజించడం ద్వారా గణించబడిన ఉత్పత్తి). ఈ విధమైన విశ్లేషణ పూర్తిగా కుటుంబ చరిత్రపై ఆధారపడి లేదా జన్యు పరీక్షతో చేయవచ్చును.

10.10. ప్రమాద కారకాల గుర్తింపు-జన్యు పరీక్ష :

ఇతర ప్రమాద కారకాల గుర్తింపుతో సమాంతరంగా జన్యు పరీక్ష జరుగుతుంది. ముఖ్యంగా బయేసియన్ విశ్లేషణ జన్యుస్థితికి సంబంధించిన సమాన లక్షణ సమాంతరాన్ని ఉపయోగించి చేయవచ్చును మరియు జన్యు పరీక్షతో కలిసినప్పుడు ఈ విశ్లేషణ చాలా క్లిష్టంగా మారుతుంది.

ఉదాహరణకు, ఎకోజెనిక్ ప్రేగు కోసం వెతుకుతున్న అల్ట్రాసౌండ్ ద్వారా పిండంలో గుర్తించవచ్చును. అనగా స్కాన్-2లో సాధారణం కంటే ప్రకాశవంతంగా కనిపించేది. ఇది పూర్తి స్థాయి గుర్తింపు పరీక్ష కాదు, ఎందుకంటే సంపూర్ణ ఆరోగ్యవంతమైన పిండంలో ఎకోజెనిక్ ప్రేగు ఉంటుంది. ఈ సందర్భంలో తల్లిదండ్రుల జన్యు పరీక్ష చాలా ప్రభావవంతంగా ఉంటుంది. ఇక్కడ సంభావ్యత గణనలో ఒక సమ లక్షణ అంశం అధికంగా ప్రభావం చూపుతుంది.

10.11. ముగింపు :

సంభావ్యత సిద్ధాంతం మరియు గణాంకాలలో బేయెస్ సిద్ధాంతం ప్రత్యామ్యాయంగా బేయెస్ చట్టం ద్వారా లేదా బేయెస్ నియమం ద్వారా లేదా బేయెస్ ధర సిద్ధాంతం ద్వారా వివరించబడినది. ముఖ్యంగా బేయెస్ సిద్ధాంతానికి రెవరెండ్ థామస్ బేయెస్ పేరు పెట్టారు. బేయెస్ సిద్ధాంతం గణిత శాస్త్రంగా చెప్పబడినది. ముఖ్యంగా బేయెస్ సిద్ధాంతం కొన్ని ముఖ్యమైన ఉదాహరణల ద్వారా వివరించబడినది. బేయెస్ సిద్ధాంతంలో లోపభూయిష్టమైన ఉత్పత్తి రేటు అనునది అతి ప్రధానమైనది. బేయెస్ సిద్ధాంతం ముఖ్యమైన ప్రతిపాదన తర్కంపై ఆధారపడి ఉన్నది. బేయెస్ సిద్ధాంతం అతి ముఖ్యమైన ప్రతిపాదన జన్యుశాస్త్రంపై ఆధారపడి పరిశీలించబడుతుంది. అంతేకాకుండా, బేయెస్ సిద్ధాంతం ప్రమాధ కారకాల గుర్తింపు గురించి పరిశీలించుటక ఉపయోగపడుతుంది.

10.12. మాదిరి పరీక్ష ప్రశ్నలు :

I వ్యాసరూప ప్రశ్నలు :

1) బేయెస్ సిద్ధాంతం అనగానేమి ? విశ్లేషించండి ?

2) బేయెస్ సిద్ధాంతాన్ని ఉదాహరణల ద్వారా వివరించండి ?

3) సంభావ్యతలో బేయెస్ సిద్ధాంతం ఏ విధంగా ఉపయోగపడుతుందో వివరించండి ?

II సంక్షిప్త వ్యాసరూప ప్రశ్నలు :

1) బేయెస్ సిద్ధాంతం ఏ ఏ పరీక్షలపై ఆధారపడి నిర్మించబడుతుందో వివరించండి ?

2) బేయెస్ సిద్ధాంతంలోని లోపభూయిష్టమైన ఉత్పత్తి రేటును వివరించండి ?

III సంక్షిప్త ప్రశ్నలు :

1) బేయెస్ ఔషధ పరీక్ష ?

2) బేయెస్ సిద్ధాంతం-జన్యు శాస్త్రాన్ని ఏవిధంగా సహాయపడుతుంది ?

10.13. ఆచూకి గ్రంథాలు :

1. జాయ్స్, జేమ్స్ (2003). "బేయెస్ సిద్ధాంతం", జల్టాలో ఎడ్వర్డ్ ఎన్ (ed). ది స్టాన్ ఫోర్డ్ ఎన్‌సైక్లోపిడియా ఆఫ్ ఫిలాసఫీ (2009), మెటా ఫిజిక్స్ రీసెర్చ్ ల్యాబ్, స్టాన్ ఫోర్డ్ యూనివర్శిటి.

2. గిగెరెంజర్, గెర్డ్, హోఫ్రేజ్, ఉల్రిచ్ (1995), "సూచన లేకుండా బయేసియన్ రీజనింగ్‌ను ఎలా మెరుగుపరచాలి: ఫ్రీక్వెన్సీ ఫార్మాట్‌లు: సైకలాజికల్ రివ్యూ". 102(4): pp 684-704.

3. బేయెస్, థామస్ మరియు ప్రైస్, రిచర్డ్ (17963). "డాక్ట్రిన్ ఆఫ్ చాన్స్‌లో ఒక సమస్యను పరిష్కరించే దిశగా ఒక వ్యాసం దివంగత రెవరెండ్. విస్టర్ ప్రైస్ ద్వారా తెలియజేయబడినది. "లండన్ రాయల్ సొసైటి యొక్క తాత్విక లావాదేవిలు 53: 370-418.

4. ఆటున్ జో సాంగ్ (2016). సబ్జెక్టివ్ లాజిక్‌లో బేయెస్ సిద్ధాంతాన్ని సాధారణికరించడం. IEEE ఇంటర్నేషనల్ కాన్ఫరెన్స్ ఆన్ మల్టి సెన్సర్ ఫ్యూజన్ అండ్ ఇంటిగ్రేషన్ ఫర్ ఇంటెలిజెంట్స్ సిస్టమ్స్ బాడెన్.

5. గిన్‌స్టెడ్, CM మరియు స్నెల్, JL (1997). ఇంట్రడక్షన్ టు ప్రాబబిలిటి (2వ ఎడిషన్), అమెరికన్ మ్యాథమెటికల్ సొసైటి.

6. లాప్లేస్, పియర్ సైమన్ (1986), "మెమోయిల్ ఆన్ ది ప్రాబబిలిటి ఆఫ్ ది కాజెస్ ఆఫ్ ఈవెంట్స్" స్టాటిస్టికల్ సైన్స్. 1(3): pp 364-378.

పాఠం - 11

విలోమ సంభావ్యత నమూనా

INVERSE PROBABILITY

పాఠ్య నిర్మాణ క్రమం :

11.0. ఉద్దేశ్యాలు

11.1. పరిచయం

11.2. విలోమ సంభావ్యత వివరణ

11.3. విలోమ సంభావ్యత నిర్వచనం

11.4. విలోమ సంభావ్యత - అంతర దృష్టి

11.5. ఖచ్చితత్వానికి రుజువు

11.6. తగ్గించబడిన పంపిణి

11.7. విలోమాల సంఖ్య తగ్గింపు

11.8. ముగింపు

11.9. మాదిరి పరీక్ష ప్రశ్నలు

11.10. ఆచూకి గ్రంథాలు

11.0. ఉద్దేశాలు :

- సంభావ్యత అనే పదానికి అర్థం మనకు పూర్తి స్థాయిలో తెలియనప్పటికీ నిత్యజీవితంలో అనేక సందర్భాలలో ఈ భావాన్ని ఉపయోగిస్తూ ఉంటారు.
- విలోమ పరివర్తన సంభావ్యత కేవలం విరామంలో కత్తిరించబడిన పంపిణిల కేసులను విస్తరించడానికి ఉపయోగపడుతుంది.
- విలోమ సంభావ్యత ఒక నిరంతర సంచిత పంపిణి ఫంక్షన్‌గా ఉంటుంది. పెద్ద సంఖ్యలలో విలోమానాలను పొందుతున్నప్పుడు విలోమాల సంఖ్యను తగ్గించడానికి ఒక సాధ్యమైన మార్గం.

- విలోమ పరివర్తన నమూనా ప్రకారం ఒక సంఖ్య యొక్క ఏకరీతి నమూనాలను తీసుకుంటుంది. దీనిని '0' మరియు '1' మధ్య సంభావ్యతగా విభజించబడుతుంది.

11.1. పరిచయం :

విలోమ పరివర్తన నమూనా దీనినే విలోమ సంభావ్యత సమగ్ర పరివర్తన అని కూడా పిలుస్తారు. విలోమ పరివర్తన పద్ధతి, స్మిర్నోవ్ పరివర్తన లేదా గోల్డెన్ రూల్ అనేది నకిలీ ర్యాండమ్ సంఖ్యల నమూనా కోసం ఒక ప్రాథమిక పద్ధతి అనగా ఇందులో నమూనా సంఖ్యలను రూపొందించడానికి దాని సంచిత పంపిణి ఫంక్షన్ ఇచ్చిన ఏదైనా సంభావ్యత పంపిణి నుండి యాదృచ్ఛికం.

11.2. విలోమ సంభావ్యత వివరణ :

విలోమ పరివర్తన నమూనా ఒక సంఖ్య యొక్క ఏకరితి నమూనాలను తీసుకుంటుంది 40 మరియు 1 మధ్య సంభావ్యత వివరించబడి, ఆపై అతి పెద్ద సంఖ్యను అందిస్తుంది. x పంపిణి డోమైన్ నుండి P(X) అలాంటి $P(-\alpha > X > x) \leq u$.
ఉదాహరణకు, అది ఊహించుకోండి P(X) సగటు సున్నా మరియు ప్రామాణిక విచలనం ఒకటితో ప్రామాణిక సాధారణ పంపిణి.

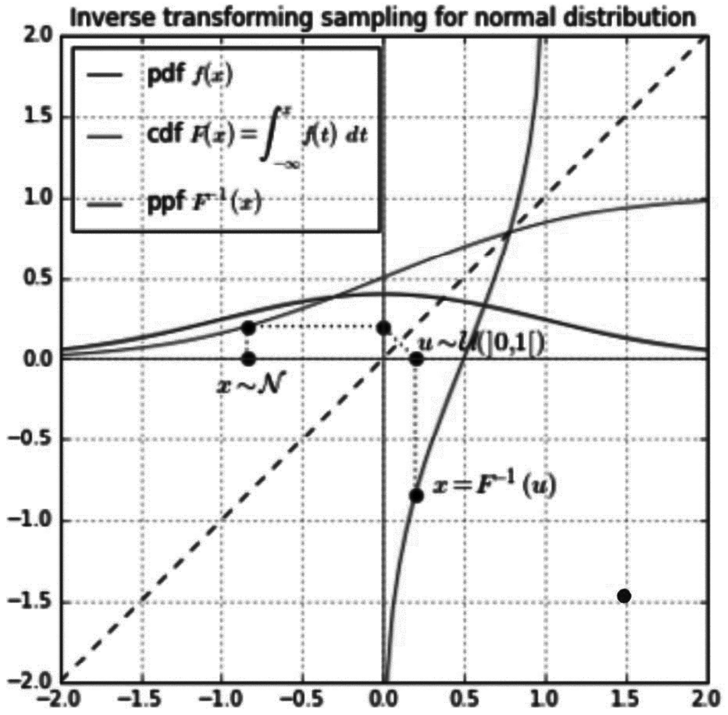
ఈక్రింది పట్టిక ఏకరూప పంపిణి నుండి తీసుకోబడిన నమూనాలను మరియు ప్రామాణిక సాధారణ పంపిణి పై వాటి ప్రాతినిధ్యాన్ని చూపుతుంది.

పట్టిక-1

ఏకరూప నమూనా నుండి సాధారణ స్థితికి రూపాంతరం

μ	$F^{-1}(\mu)$
.5	0
.975	1.95996
.995	2.5758
.999999	4.75342
$1-2^{-52}$	8.12589

రేఖా చిత్రం -1



సాధారణ పంపిణి కోసం విలోమ పరివర్తన నమూనా

యాదృచ్ఛికంగా వక్రరేఖ క్రింద ఉన్న ప్రాంతం యొక్క నిష్పత్తిని ఎంచుకుంటాం మరియు డొమైన్ లోని సంఖ్యను తిరిగి పంపవచ్చును. ఆ సంఖ్య ఈ ప్రాంతం యొక్క నిష్పత్తి ఖచ్చితంగా ఆ సంఖ్యకు ఎడమవైపున ఉంటుంది. అకారణంగా, తోకల చివరలో సంఖ్యను ఎంచుకొనే అవకాశం లేదు. ఎందుకంటే వాటిలో చాలా తక్కువ ప్రాంతం ఉన్నది. దీనికి సున్నాకి లేదా ఒకటికి చాలా దగ్గరగా ఉండే సంఖ్యను ఎంచుకోవలసి ఉంటుంది.

గణనపరంగా, ఈ పద్ధతిలో పంపిణి యొక్క క్వాంటైల్ ఫంక్షన్ గణించడం ఉంటుంది. ఇతర మాటలలో, పంపిణి యొక్క సంచిత పంపిణి ఫంక్షన్ (CDF) (డొమైన్ లోని సంఖ్య ను '0' మరియు '1' మధ్య సంభావ్యతకు మ్యాప్ చేస్తుంది) మరియు ఆ ఫంక్షన్‌ను విలోమం చేయడం అనే పదానికి ఇది మూలం. వివిక్త పంపిణి కోసం, సంచిత పంపిణి ఫంక్షన్‌ని కంప్యూటింగ్ చేయడం సాధారణంగా చాలా కష్టం కాదని గమనించండి. ముఖ్యంగా పంపిణి యొక్క వివిధ పాయింట్ల కోసం వ్యక్తిగత సంభావ్యతలను జోడిస్తారు. అయితే నిరంతర పంపిణి కోసం, సంభావ్యత సాంద్రత ఫంక్షన్‌ను ఏకీకృతం చేయాలి పంపిణి. ఇది అనేక పంపిణిలకు సాధారణ పంపిణితో సహా విశ్లేషణాత్మకంగా చేయడం అసాధ్యం. ఫలితంగా, ఈ పద్ధతి అనేక పంపిణిలకు గణనపరంగా అసమర్ధంగా ఉండవచ్చు మరియు ఇతర పద్ధతులను ప్రాధాన్యత ఇవ్వబడుతుంది. అయినప్పటికి, తిరస్కరణ నమూనా ఆధారంగా మరింత సాధారణంగా వర్తించే నమూనాలను రూపొందించడానికి ఇది ఉపయోగకరమైన పద్ధతి.

సాధారణ పంపిణి కోసం సంబంధిత క్వాంటైల్ ఫంక్షన్ కోసం విశ్లేషణాత్మక వ్యక్తీకరణ లేకపోవడం అంటే ఇతర పద్ధతులు (ఉదాహరణ: బాక్స్ ముల్లర్ పరివర్తన) గణన పరంగా ప్రాధాన్యత ఇవ్వవచ్చును. సాధారణ పంపిణిల కోసం కూడా, విలోమ పరివర్తన నమూనా పద్ధతిని మెరుగుపరచవచ్చును.

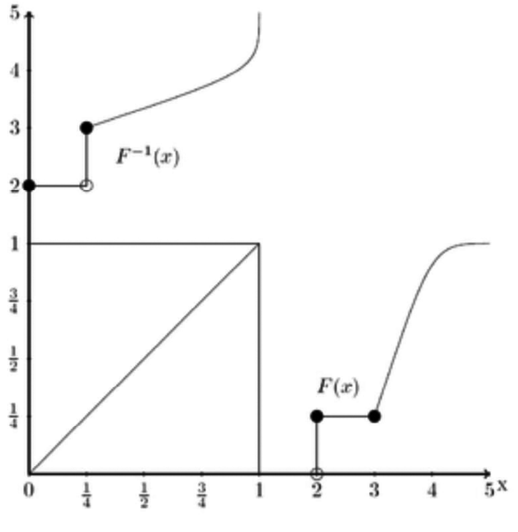
ఉదాహరణకు, జిగ్గు రాట్ అల్గారిథమ్ మరియు తిరస్కరణ నమూనా ప్రకారం ఇందులో మోడరేట్ డిగ్రీ బహుపదిలను ఉపయోగించి సాధారణ పంపిణి యొక్క క్వాంటైల్ ఫంక్షన్‌ను చాలా ఖచ్చితంగా అంచనా వేయడం సాధ్యమౌతుంది మరియు వాస్తవానికి దీనిని చేసే పద్ధతి తగినంత వేగంగా ఉంటుంది. విలోమ నమూనా ఇప్పుడు సాధారణ పంపిణి నుండి నమూనా కొరకు తొలగింపు పద్ధతి ముఖ్యమైనది.

11.3. విలోమ సంభావ్యత నిర్వచనం :

సంభావ్యత సమగ్ర రూపాంతరం అయితే 'X' సంచిత పంపిణి ఫంక్షన్‌తో నిరంతర యాదృచ్ఛిక వేరియబుల్ FX, తరువాత యాదృచ్ఛిక వేరియబుల్ Y = FX (X) [0, 1] పై ఏకరీతి పంపిణీని కలిగి ఉన్నది. విలోమ సంభావ్యత సమగ్ర పరివర్తన దీని యొక్క విలోమం మాత్రమే. ప్రత్యేకంగా అయితే Y [0, 1] మరియు ఏకరూప పంపిణిని కలిగి ఉన్నది. X సంచిత పంపిణిని కలిగి ఉన్నది. FX తరువాత యాదృచ్ఛిక వేరియబుల్ $F_X^{-1}(Y)$ లాంటి పంపిణిని కలిగి ఉన్నది. 'X' నుండి విలోమ సాంకేతికత యొక్క గ్రాఫ్ 'x' కు $F(x)$. దిగువున కుడివైపున రెగ్యులర్ ఫంక్షన్‌ను గమనించవచ్చును. ఎగువ ఎడమవైపు దాని విలోమం ఉంటుంది. దీని ఈ క్రింది రేఖా చిత్రం చూపించవచ్చును.

రేఖా చిత్రం-2

యాదృచ్ఛిక వేరియబుల్



పంపిణి

11.4. విలోమ సంభావ్యత - అంతర దృష్టి :

అంతర దృష్టి నుండి $U \sim Unit(0,1)$ లను ఉత్పత్తి చేయాలనుకున్నప్పుడు X CDF తో $F_X(x)$ వాటిని ఊహిస్తారు. $F_X(x)$ ఖచ్చితంగా పెరుగుతున్న ఫంక్షన్. ఇది అంతర్ దృష్టిని అందిస్తుంది.

ఉదాహరణకు ఖచ్చితంగా మోనోటోన్ పరివర్తనను కనుగొనగలమో లేదో పరిశీలించవచ్చును. ఇందులో,

$T:[0,1] \rightarrow R,$ అలాంటి $T:(U)^d = X$ మనం దానిని కలిగి ఉంటాం.

$$F_X(x) = \Pr(X \leq x)$$
$$= \Pr(T(U) \leq x)$$
$$= \Pr(U \leq xT^{-1}(x))$$
$$= T^{-1}(x), \quad for \quad x \in R.$$

చివరి దశ దానిని ఉపయోగించి $\Pr(U \leq y) = y$ ఎప్పుడు U మీద ఏకరీతిగా ఉన్నది (0, 1).

కాబట్టి F_X యొక్క విలోమ ఫంక్షన్ T లేదా సమానంగా

$$T(u) = F_X^{-1}(u), u \in [0,1].$$

అందువలన, మనం చేయు ఉత్పత్తి X నుండి $F_X^{-1}(U)$. విలోమ సంభావ్యత పద్ధతి పరిష్కరించే సమస్య ఈక్రింది విధంగా ఉంటుంది.

- X యాదృచ్ఛిక వేరియబుల్, దీని పంపిణిని క్యుములేటివ్ పంపిణి ఫంక్షన్ ద్వారా వివరించవచ్చును. F_X.
- మనం విలువలను రూపొందించాలనుకున్నప్పుడు X ఈ పంపిణి ప్రకారం చేయబడుతుంది.
- యాదృచ్ఛిక సంఖ్యను రూపొందించినప్పుడు u విరామంలో ప్రామాణిక ఏకరీతి పంపిణి నుండి [0, 1].

ఉదాహరణ: $U \sim Unit[0,1]$.

కావలసిన సంచిత పంపిణి ఫంక్షన్ (CDF) యొక్క విలోమాన్ని కనుగొనండి.

ఉదాహరణ: $F_X^{-1}(x)$.

గణించు $X = F_X^{-1}(u)$. కంప్యూటింగ్ కాంటమ్ వేరియబుల్ X పంపిణి ఉన్నది. $F_X(x)$.

విభిన్నంగా వ్యక్తీకరించబడినది. నిరంతర ఏకరీతి వేరియబుల్ ఇవ్వబడినది. $'U'$ లో [0, 1] మరియు ఇన్వర్టబుల్ క్యుములేటివ్ పంపిణి ఫలం F_X, యాదృచ్ఛిక వేరియబుల్ $X = F_X^{-1}(U)$ పంపిణి ఉన్నది. F_X (లేదా X పంపిణి చేయబడుతుంది F_X).

ఆవిధంగా అవకలన సమీకరణాలను సంతృప్తి పరిచే వస్తువుల కంటే విలోమ ఫంక్షన్‌ల చికిత్సను అందించవచ్చును. అలాంటి కొన్ని అవకలన సమీకరణలు వాటి నాన్-లేనియారిటి ఉన్నప్పటికి, స్పష్టమైన పవర్ సిరీస్ పరిష్కారాలను అంగీకరిస్తాయి.

ఉదాహరణలు:

ఉదాహరణంగా మనకు యాదృచ్ఛిక వేరియబుల్ ఉందని అనుకుందాం. $U \sim Unit(0,1)$ మరియు సంచిత పంపిణి ఫంక్షన్.

$$F(x) = 1 - \exp(-\sqrt{x})$$

విలోమాన్ని అమలు చేయడానికి మరియు పరిష్కరించాలనుకుంటున్నప్పుడు $F(F^{-1}(u)) = u$

$$F(F^{-1}(u)) = u$$

$$1^{\exp}(-\sqrt{F^{-1}(u)} = u$$

$$F^{-1}(u) = (-\log(1-u))^2$$

$$= \log(.1-u)^2$$

ఇక్కడ నుండి మనం ఒకటి, రెండు మరియు మూడు దశలను పరిశీలిస్తాం.

మరొక ఉదాహరణలో, దీనితో ఘాతాంక పంపిణిని ఉపయోగిస్తారు. $F_X(x) = 1 - e^{-\lambda x} X \geq 0$ కోసం (మరియు సున్న లేకపోతే) $Y = F(x)$ ని పరిష్కరించడం ద్వారా విలోమ ఫంక్షన్ పొందవచ్చును.

$$x = F^{-1}(y) = -\frac{1}{\lambda} \text{ లో } (1-y).$$

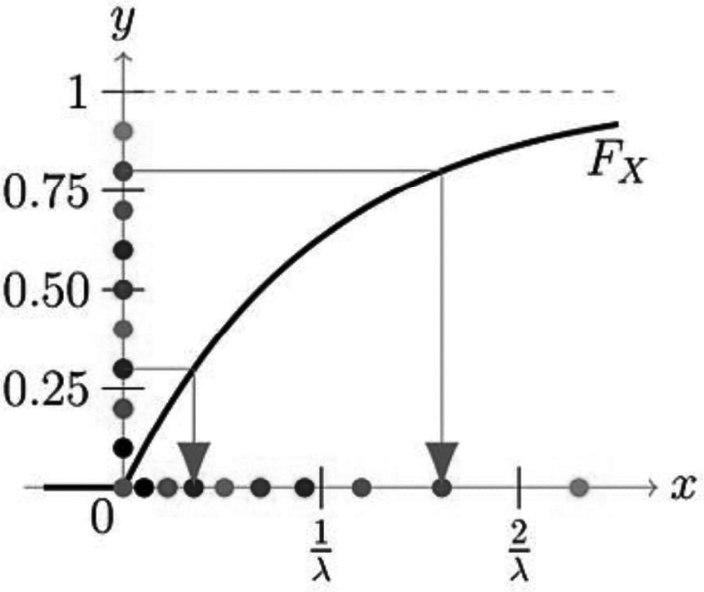
ఇందులో కొన్ని రేఖలను గీచినట్లయితే దాని అర్థం y_0 నుండి $U \sim Unit(0,1)$ మరియు గణిస్తుంది.

$$x_0 = F_x^{-1}(y_0) = -\frac{1}{\lambda} \text{ లో } (1-y_0).$$

ఈ x_0 ఘాతాంక పంపిణిని కలిగి ఉంటుంది. ఆ విలువలలో ఈక్రింది రేఖ చిత్రం ద్వారా వివరించవచ్చును.

రేఖాచిత్రం-3

$Y \sim U(0,1)$



పై రేఖా చిత్రంలో యాదృచ్ఛిక సంఖ్యలు 'Y, 0' మరియు 1 మధ్య ఏకరీతి పంపిని నుండి ఉత్పత్తి చేయబడతాయి. అనగా $Y \sim U(0,1)$. అవి y అక్షంపై బిందువులుగా ఉంటాయి. ఇందులో ప్రతి పాయింట్ $X = F^{-1}(y)$ ప్రకారం మ్యాప్ చేయబడినది. అంతేకాకుండా ఇవి రెండు ఉదాహరణ పాయింట్ల కోసం బుణాలతో వేసిన గుర్తులను చూపబడుతుంది. ఈ ఉదాహరణలో, ఘాతాంక పంపిణిని ఉపయోగించును. అందువలన $X \geq 0$ కోసం, సంభావ్యత సాంద్రతం $X(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ మరియు సంచిత పంపిణి ఫంక్షన్.

$$F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$$

అందువలన $$x = F^{-1}(-y) = \frac{In(1-y)}{\lambda}.$$

ఈ పద్ధతిని ఉపయోగించి, చాలా పాయింట్లు '0' కి దగ్గరగా ముగుస్తాయని మరియు కొన్ని పాయింట్లు మాత్రమే అధిక 'X' విలువలను కలిగి ఉన్నాయని మనం గ్రహించవచ్చును. ఇది ఎక్స్పోనెన్షియల్ పంపిణి కోసం ఊహించినట్లే.

ఇందులో y కి బదులు $1-y$ తో ప్రారంభిస్తే పంపిణి మారదని గమనించండి. గణన ప్రయోజనాల కోసం యాదృచ్ఛిక సంఖ్యలను $Y\,[0,1]$ లో ఉత్పత్తి చేసి, ఆ పై కేవలం గణించడం సరిపోతుంది.

$$x = F^{-1}(y) = -\frac{1}{\lambda} In\,(y).$$

11.5. ఖచ్చితత్వానికి రుజువు :

F ఒక నిరంతర సంచిత పంపిణి ఫంక్షన్‌గా ఉంటుంది మరియు F^{-1} దాని విలోమ ఫంక్షన్‌గా ఉంటుంది. (CDF లు బలహీనంగా మార్పులేనివి మరియు కుడి, నిరంతరంగా ఉన్నందున ఉపయోగించడం).

$$x = F^{-1}(u) = \inf\{x / F(x) \geq u\} (0 < u < 1)$$

$'U'$ అనేది (0, 1) ఏకరీతి యాదృచ్ఛిక వేరియబుల్ అయితే $F^{-1}(U)F$ ను CDF గా కలిగి ఉన్నది.

రుజువు:

$$\Pr(F^{-1}(U) \leq x)$$

$$= \Pr(U \leq F(x))$$

$$= F(x)$$

(F ను రెండవ వైపు ఉపయోగించడమైనది)

అయితే $\Pr(U \leq y) = y$

ఎప్పుడైనా U అనునది ఒకేవిధంగా (0, 1) ఉంటుంది.

11.6. తగ్గించబడిన పంపిణి :

విలోమ సంభావ్యత కేవలం విరామంలో కత్తిరించబడిన పంపిణిల కేసులకు విస్తరించబడుతుంది. (a, b) తిరస్కరణ నమూనా ఖర్చు లేకుండా అదేవిధంగా అల్గారిథమ్‌ను అనుసరించవచ్చును. కాని యాదృచ్ఛిక సంఖ్యను రూపొందించడానికి బదులుగా u '0' మరియు '1' మధ్య ఏకరీతిగా పంపిణి, ఉత్పత్తి u మధ్య ఏకరీతిగా పంపిణి చేయబడినది $F(a)$ మరియు $F(b)$.

11.7. విలోమాల సంఖ్య తగ్గింపు :

పెద్ద సంఖ్యలో నమూనాలను పొందేందుకు, పంపిణి యొక్క అదే సంఖ్యలో విలోమాలను నిర్వహించాలి. పెద్ద సంఖ్యలో నమూనాలను పొందుతన్నప్పుడు విలోమాల సంఖ్యను తగ్గించడానికి ఒక సాధ్యమైన మార్గం, బహు పది గందరగోళ విస్తరణ ఫ్రేమ్ వర్క్‌లో స్టాకాస్టిక్ కో లోకేషన్ వీలుంటే కార్లోశాంట్లర్ (SCMC నమూనా) అని పిలవబడే అప్లికేషన్. ఇది విలోమాలు విశ్లేషనాత్మకంగా అందుబాటులో ఉండే వేరియబుల్ యొక్క స్వతంత్ర నమూనాతో అసలైన పంపిని యొక్క కొన్ని విలోమాలతో ఎన్ని SCMC నమూనాలను అయిన రూపొందించడానికి అనుమతి ఇస్తుంది.

11.8. ముగింపు :

విలోమ పరివర్తన నమూనాను విలోమ సంభావ్యత సమగ్ర పరివర్తన అని కూడా అంటారు. విలోమ పరివర్తన నమూనాలో ఒక సంఖ్య యొక్క ఏకరీతి నమూనాలను తీసుకోవడం జరగుతుంది. విలోమ పరివర్తన నమూనాలో సున్నా లేదా ఒకటికి చాలా దగ్గరగా ఉన్న సంఖ్యను తీసుకుంటారు. అంతేకాకుండా విలోమ సంభావ్యత అంతర్ దృష్టి ద్వారా వివరించవచ్చును. విలోమ సంభావ్యత నమూనా ముఖ్యమైన ఉదాహరణల ద్వారా వివరించబడినది. అంతేకాకుండా విలోమ సంభావ్యత నమూనా ఖచ్చితత్వానికి రుజువు చేయుటకు ఉపయోగపడుతుంది. అలాగే విలోమాల సంఖ్య తగ్గించుటకు కూడా ఈ సిద్ధాంతం సరిచేస్తుంది.

11.9. మాదిరి పరీక్ష ప్రశ్నలు :

I వ్యాసరూప ప్రశ్నలు :

1) విలోమ సంభావ్యత నమూనాను విశ్లేషణాత్మకంగా పరిశీలించండి ?
2) విలోమ సంభావ్యత నమూనా అనగానేమి ? రేఖా చిత్రం ద్వారా వివరించండి ?
3) విలోమ సంభావ్యత నమూనా నిర్వచనం ? మరియు వివిధ ఉదాహరణల ద్వారా విశ్లేషించండి ?

II సంక్షిప్త వ్యాసరూప ప్రశ్నలు :

1) విలోమ సంభావ్యత యొక్క అంతర్ దృష్టిని వివరించండి ?
2) విలోమ సంభావ్యత నమూనా యొక్క వివిధ అంశాలను వివరించండి ?

III సంక్షిప్త ప్రశ్నలు :

1) విలోమ సంభావ్యత వివరణను రేఖా చిత్రం ద్వారా వివరించండి ?
2) విలోమ సంభావ్యత అంతరదృష్టి ?
3) విలోమ సంభావ్యత ఖచ్చితత్వానికి రుజువు వివరించండి ?

11.10. ఆచూకి గ్రంథాలు :

1. ఆల్టో యూనివర్శిటి, ఎన్. హైవోనెన్, విలోమ సమస్యలలో గణన పద్ధతులు. పన్నెండవ ఉపన్యాసం.

2. లూక్ డెవ్రోమ్ (1986). నావ్ యూనిఫాం కాంటమ్ వేరియంట్ జనరేషన్, న్యూయార్క్: స్ప్రింగర్-వెర్లాంగ్.

3. స్టెయిన్ బ్రేచర్, G, షా, WT (2008). క్వాంటైల్ మెకానిక్స్, యూరోపియన్ ఆఫ్ అప్లైడ్ మ్యాథమెటిక్స్. 19 (2): pp 87-122.

4. LA గ్రెజెలక్, JAS విట్వెన్, M సురెజ్ మరియు CW ఊస్టర్లీ, యాదృచ్ఛిక కొలోకేషన్ మొంటేకార్లో నమూనా: ఖరీదైన పంపిణిల నుండి అత్యంత సమర్ధవంతమైన నమూనా.

పాఠం - 12

ఉమ్మడి మరియు ఉపాంత సంభావ్యత

JOINT AND MARGINAL PROBABILITIES

పాఠ్య నిర్మాణ క్రమం :

12.0. ఉద్దేశ్యాలు

12.1. పరిచయం

12.2. ఉమ్మడి సంభావ్యత ఉదాహరణలు

12.2.1. ఒక కలశం నుండి గీస్తుంది

12.2.2. నాణేం పల్టీలు కొట్టింది

12.2.3. ఒక పాచికల రోలింగ్

12.3. ఉపాంత సంభావ్యత

12.4. ఉమ్మడి సామర్థ్య ఫంక్షన్ లేదా మాస్ ఫంక్షన్

12.4.1. వివక్త కేసు

12.4.2. నిరంతర కేసు

12.4.3. మిశ్రమ కేసు

12.5. సంభావ్యత లక్షణాలు

12.5.1. స్వతంత్ర చలకం కోసం ఉమ్మడి పంపిణి

12.5.2. షరతులతో కూడిన చలరాశుల కోసం ఉమ్మడి పంపిణి

12.5.3. కోవియరెన్స్

12.5.4. సహసంబంధం

12.6. ముగింపు

12.7. మాదిరి పరీక్ష ప్రశ్నలు

12.8. ఉపయుక్త గ్రంథాలు

12.0. ఉద్దేశాలు :

- ఏకకాలంలో సంభవించే ఒకటి కంటే ఎక్కువ ఈవెంట్‌ల సంభావ్యత. వాతావరణం వర్షంగా ఉంటుందా మరియు ఉష్ణోగ్రత నిర్దిష్ట సంఖ్య కంటే ఎక్కువగా ఉంటుందా అని నేను మిమ్మల్ని అడిగితే, మీరు ఉమ్మడి సంభావ్యతను గణిస్తున్నారు అని అర్థం.
- అదేవిధంగా ఏదైనా ఇతర ఈవెంట్‌లపై షరతులు లేకుండా సంభవించే ఏదైనా ఒక సంఘటన సంభావ్యత. ఈ రోజు వాతావరణం వర్షంగా ఉంటుందా లేదా ఎండగా ఉంటుందా అని ఎవరైనా మిమ్మల్ని అడిగినప్పుడల్లా, మీరు ఉపాంత సంభావ్యతను గణిస్తున్నారు అని అర్థం.
- ఉమ్మడి సంభావ్యతలో యాధృచ్ఛికంగా ఏ విధంగా ఎంపిక చేయబడుతుందో తెలుసుకోవచ్చును.

12.1 పరిచయం:

ఒకే సంభావ్యత స్థలంలో నిర్వచించబడిన రెండు యాదృచ్ఛిక ప్రతిచయనాలు ఇచ్చునట్లయితే, ఉమ్మడి సంభావ్యత పంపిణి అనేది అన్ని సంభావ్యత జతల ఉత్పత్తిపై సంబంధిత సంభావ్యత పంపిణి. ఉమ్మడి పంపిణి అనేది ఏదైనా యాదృచ్ఛిక చరరాశుల సంఖ్య కోసం పరిగణించబడుతుంది. ఉమ్మడి పంపిణి ఉపాంత పంపిణిలను ఎన్‌కోడ్ చేస్తుంది. అనగా ఒక్కొక్క యాదృచ్ఛిక చరరాశుల యొక్క ప్రతి పంపిణిలు. ఇది షరతులతో కూడిన సంభావ్యత పంపిణీలను కూడా ఎన్‌కోడ్ చేస్తుంది. ఇది ఇతర యాదృచ్ఛిక చరరాశుల యొక్క ఉత్పత్తిపై సమాచారం ఇచ్చినప్పుడు ఒక యాదృచ్ఛిక చరరాశి యొక్క ఉత్పత్తి ఎలా పంపిణి చేయబడతాయి అనే దానితో వ్యవహరిస్తాయి.

నిజవిలువ గల యాదృచ్ఛిక చరరాశుల విషయంలో ఉమ్మడి పంపిణి, ఒక నిర్దిష్ట మల్టీవియారిట్ పంపిణిగా, మల్టివియారిట్ క్యుములేటివ్ పంపిణీ ఫంక్షన్ ద్వారా లేదా మల్టీ వియారిట్ సంభావ్యత మాస్ ఫంక్షన్‌తో కలిసి మల్టీ వియారిట్ సంభావ్యత డెన్సిటి ఫంక్షన్ ద్వారా వ్యక్తీకరించబడుతుంది. నిరంతర యాదృచ్ఛిక చరరాశులను పరిగణనలోనికి తీసుకోవడం సరిపోతుంది మరియు వివర్త యాదృచ్ఛిక చరరాశుల విషయంలో, సంభావ్యత ద్రవ్యరాశి ఫంక్షన్లు పరిగణనలోనికి తీసుకుంటే సరిపోతుంది.

12.2. ఉమ్మడి సంభావ్యత ఉదాహరణలు :

ఉమ్మడి సంభావ్యతకు సంబంధించిన ఉదాహరణలను ఈ క్రింది విధంగా వివరించవచ్చును. అవి:

12.2.1. ఒక కలశం నుండి గీస్తుంది :

ప్రతి రెండు బుట్టలలో నీలిరంగు బంతుల కంటే రెండు రెట్లు ఎక్కువ ఎర్రటి బంతులు ఉన్నాయని అనుకుందాం మరియు ఇతరాలు లేవు మరియు ప్రతి బుట్ట నుండి యాదృచ్ఛికంగా ఒక బంతి ఎంపిక చేయబడినదని అనుకుందాం. రెండు డ్రా లు ఒకదానితో ఒకటి స్వతంత్రంగా ఉంటాయి. వీలు 'A' మరియు 'B' వివక్త యాదృచ్ఛిక చరరాశులు వరుసగా మొదటి urn మరియు రెండవ urn నుండి డ్రా యొక్క ఫలితాలతో అనుబంధించబడి ఉంటాయి. ఎర్రటి బంతిని గీయడానికి సంభావ్యత 2/3 మరియు నీలి రంగు బంతిని గీయడానికి సంభావ్యత 1/3. ఉమ్మడి సంభావ్యత పంపిణి ఈక్రింది పట్టిక ద్వారా వివరించవచ్చును.

పట్టిక-1

-	ఎ = ఎరుపు	ఎ = నీలం	పి. (బి)
బి = ఎరుపు	2/3 (2/3) = 4/9	(1/3) (2/3) = 2/9	4/9 + 2/9 = 2/3
బి = నీలం	2/3 (1/3) = 2/9	(1/3) (1/3) = 1/9	2/9 + 1/9 = 1/3
పి (ఎ)	4/9 + 2/9 = 2/3	2/9 + 1/9 = 1/3	

పై పట్టికలోని నాలుగు అంతర్గత కణాలలో ప్రతి ఒక్కటి రెండు డ్రాల నుండి నిర్దిష్ట ఫలితాల కలయిక యొక్క సంభావ్యతను చూపుతుంది. ఈ సంభావ్యతలు ఉమ్మడి పంపిణీ ఏదైనా ఒక సెల్‌లో నిర్ధిష్ట కలయిక సంభవించే సంభావ్యత (డ్రా లు స్వతంత్రంగా ఉన్నందున) A కోసం పేర్కొన్న ఫలితం యొక్క సంభావ్యత యొక్క ఉత్పత్తి. ఈ నాలుగు కణాలలో సంభావ్యత మొత్తం 1, సంభావ్యత పంపిణిలకు ఇది ఎల్లప్పుడు నిజం.

అంతేకాకుండా, చివరి అడ్డ వరుస మరియు చివరి నిలువు వరుస 'ఎ' కోసం ఉపాంత సంభావ్యత పంపిణి ని మరియు 'బి' కోసం ఉపాంత సంభావ్యత పంపిణిని అందిస్తాయి. ఉదాహరణకు, 'ఎ' కోసం ఈ సెల్‌లలో మొదటిది 'ఎ' ఎరుపుగా ఉండటానికి సంభావ్యత మొత్తాన్ని ఇస్తుంది. సెల్ పైన ఉన్న నిలువు వరుసలో 'బి' కి పూర్తి అవకాశం వచ్చినప్పటికి 2/3 గా ఉంటుంది. అందువలన ఉపాంత సంభావ్యత పంపిణి 'ఎ' ఇస్తుంది. 'ఎ' యొక్క సంభావ్యతలు షరతులు లేనివి 'బి' లో ఉంటాయి.

12.2.2. నాణేం పల్టీలు కొట్టింది :

రెండు సరసమైన నాణేల ఫ్లిప్‌ను పరిగణించండి, వీలు A మరియు B మొదటి మరియు రెండవ కాయిన్ ఫ్లిప్‌ల ఫలితాలతో అనుబంధించబడిన వివిక్త యాదృచ్ఛిక చలరాశులుగా ఉంటాయి. ప్రతి కాయిన ఫ్లిప్ బెర్నౌలీ ట్రయిల్ మరియు బెర్నౌలి పంపిణి ని కలిగి ఉంటాయి. ఒక నాణేం బొమ్మ (హెడ్స్) ని ప్రదర్శిస్తే, అనుబంధ యాదృచ్ఛిక చలరాశి విలువ 1 ని తీసుకుంటుంది మరియు అది విలువ '0' ని తీసుకుంటుంది. ఈ ఫలితాల యొక్క ప్రతి సంభావ్యత ½, కాబట్టి ఉపాంత (షరతులు లేని) సాంద్రత విధులు

P (A) = ½ కొరకు $A \in \{0, 1\}$;

P (B) = ½ కొరకు $B \in \{0, 1\}$.

యొక్క ఉమ్మడి సంభావ్యత మాస్ ఫంక్షన్ A మరియు B ప్రతి జత ఫలితాలకు సంభావ్యతలను నిర్వచిస్తుంది. సాధ్యమయ్యే అన్ని ఫలితాలు

(A=0, B=0), (A=0, B=1), (A=1, B=0)

ప్రతి ఫలితం సమానంగా ఉంటుంది కాబట్టి ఉమ్మడి సంభావ్యత మాస్ ఫంక్షన్ అవుతుంది.

$$P(A, B) = P(A)\ P(B) \text{ కొరకు } A, B \in \{0, 1\}.$$

12.2.3. ఒక పాచికల రోలింగ్ :

ఇందులో సరసమైన పాచికల రోల్‌ను పరిగణించండి మరియు అనుమతించండి.

A = 1 సంఖ్య సమానంగా ఉంటే (అంటే 2, 4 లేదా 6) మరియు A = 0 లేకుంటే ఇంకా, వీలు B = 1 సంఖ్య ప్రధానమైనట్లయితే (అనగా 2, 3 లేదా 5) మరియు B = 0 లేకుంటే.

పట్టిక-2

-	1	2	3	4	5	6
ఎ	0	1	0	1	0	1
బి	0	1	1	0	1	0

అప్పుడు, ఉమ్మడి పంపిణి A మరియు B సంభావ్యత మాస్ ఫంక్షన్‌గా వ్యక్తీకరించబడినది.

$$P(A=0\ B=0) = P\{1\} = 1/6,$$

$$P(A=0\ B=1) = P\{3, 5\} = 2/6,$$

కొన్ని కలయికల యొక్క సంభావ్యత నుండి ఈ సంభావ్యతలు తప్పనిసరిగా 1 కి మొత్తం ఉండాలి. A మరియు B సంభవిస్తుంది 1.

12.3. ఉపాంత సంభావ్యత :

ఒక జత యాదృచ్ఛిక చలం కాల కోసం X, Y ఉమ్మడి పంచిత పంపిణి ఫంక్షన్ FXY ద్వారా ఇవ్వబడినది.

$$F\ X, Y\ (x, y) = P\ (X \leq x,\ Y \leq y).$$

ఇక్కడ కుడి వైపు యాదృచ్ఛిక చలరాశి సంభావ్యతలను సూచిస్తుంది. X కంటే తక్కువ లేదా సమానమైన విలువను తీసుకుంటుంది. x మరియు అది y కంటే తక్కువ లేదా సమానమైన విలువను తీసుకుంటుంది y.

కోసం N యాదృచ్ఛిక చలరాశి X_1, ... X_N.

ఉమ్మడి CDF FX_1, ... X_N ద్వారా ఇవ్వబడుతుంది.

FX_1, ... X_N (x_1, ... x_n) = P ($X_1 \leq x_1$, ... $X_N \leq x_N$).

అని వ్యాఖ్యానించడం N యాదృచ్ఛిక వెక్టర్ గా యాదృచ్ఛిక చలరాశుల X = (X_1 ..... X_N)T చిన్న సంజ్ఞామానాన్ని ఇస్తుంది.

$$F\ X\ (x) = P\ (X_1 \leq x_1,\ X_N \leq x_N).$$

వ్యాఖ్యానించడం N యాదృచ్ఛిక వెక్టర్ గా యాదృచ్ఛిక అస్థిరమైన X = (X_1, ... X_N)T చిన్న సంజ్ఞామానాన్ని ఇస్తుంది.

$$F\ X\ (x) = P\ (X_1 \leq x_1,\ ......\ X_N).$$

12.4. ఉమ్మడి సామర్థ్య ఫంక్షన్ లేదా మాస్ ఫంక్షన్ :

ఉమ్మడి సాంద్రత ఫంక్షన్ ఈ క్రింది విధంగా తెలియజేస్తుంది.

12.4.1. వివక్త కేసు:

రెండు వివక్త యాదృచ్ఛిక అస్థిరమైన చలంకాల యొక్క ఉమ్మడి సంభావ్యత మాస్ ఫంక్షన్ X, Y ఉన్నది.

సూత్రం: PX, Y (x, y) = P(X=x / Y=y), P (P=y)

ఎక్కడ P(X=x), P (Y, y)

ఎక్కడ P(Y=y), (X = x) యొక్క సంభావ్యత

Y = y అని హామీ ఇచ్చారు.

మునుపటి రెండు ఆటంకాల వలన కేసు యొక్క సాధారణికరణ ఉమ్మడి సంభావ్యత n (వివిక్త యాదృచ్ఛిక వేరియబుల్)

X_1, X_2, ... X_n ఏది:

P(X_1, ... X_n) (x_1, ... x_n) P (X_1 = x_1 మరియు X_n, ... x_n) లేదా సమానంగా.

PX_1, ... X_n (x_1..... x_n) = P(X_1=x_1) P(X_2) P(X_3 = 3n / X_1 = x)

P (X_n = x_n (X_1=2).

ఈ గుర్తింపును సంభావ్యత యొక్క గొలుసు నియమం అంటారు. ఇవి సంభావ్యతలు కాబట్టి రెండు వేరియబుల్ విషయంలో

సూత్రం: $\sum_i \sum_i P(X = xi$ మరియు $Y = yi) = 1,$

ఇది సాధారణికరించబడుతుంది. 'n' వివిక్త యాదృచ్ఛిక వేరియబుల్స్ X_1, X_2, ... X_n కు

$$\sum_i \sum_j .....\sum_k P(X_1 = x_1 i, X_2 = x_2 i, ...x).$$

12.4.2 నిరంతర కేసు:

ఉమ్మడి సంభావ్యత సాంద్రత ఫంక్షన్ f X, Y (x, y) రెండు నిరంతర యాదృచ్ఛిక వేరియబుల్స్ కోసం ఉమ్మడి సంచిత పంపిణి ఫంక్షన్ యొక్క ఉత్పన్నంగా నిర్వచించబడుతుంది.

సూత్రం: $$f\ X,Y(x,y) = \frac{\partial^2 F\ X,Y\,(x,y)}{\partial x\, \partial u}$$

ఇది దీనికి సమానం.

$$f\ X,Y(x,y) = FY/X(y/x)\, f\ x(x) = f\ X/Y(x/y)$$

f X, Y (x, y) మరియు f X/Y (x/y) ల యొక్క షరతులతో కూడిన పంపిణి లు Y ఇచ్చిన X = x f Y(y) మరియు f Y(y) కోసం ఉపాంత పంపిణిలు X మరియు Y లు వరుసగా

నిర్వచనం సహజంగా రెండు కంటే ఎక్కువ యాదృచ్ఛిక వేరియబుల్స్‌కు సూచిస్తుంది.

సూత్రం: $$fX_1.......X_n,(x_1,.......x_n) = \frac{\partial^n FX_1.......X_n(x_1,.......x_n)}{\partial x_1 ...\partial x_n}$$

మరలా ఇవి సంభావ్యత పంపిణీలు కాబట్టి ఒకటి ఉంటే

$$\int x \int y\ \ f\ X,Y(x,y)\,dydx = 1$$

వరుసగా

$$\int x_1.......\int x_{xn}\ \ f\ X_1,......X_n(x_1,........x_n)$$

$$dx_n......dx_1 = 1.$$

12.4.3 మిశ్రమ కేసు:

ఒకటి లేదా అంతకంటే ఎక్కువ యాదృచ్ఛిక అంశాలు నిరంతరంగా మరియు ఇతర యాదృచ్ఛిక చలంకాలు వివిక్తంగా ఉన్న చోట మిశ్రమ ఉమ్మడి సాంద్రత నిర్వచించబడవచ్చును. ప్రతి రకానికి ఒక చలంకంతో

$$f\ X, Y(x, y) = FX / Y(x / y)P(Y = y) = P(Y)$$

బైనరీ ఫలితం Y షరతులతో కూడిన సంభావ్యతను అంచనా వేయడంలో లాజిస్టిక్ ప్రతిచయనాన్ని ఉపయోగించాలను కున్నప్పుడు ఒక యాదృచ్ఛిక చలంకం నిరంతరాయంగా మరియు మరొక యాదృచ్ఛిక చలంకం వివిక్తంగా ఉండే సంచిత పంపిణిని కనుగొనాలనుకొనే పరిస్థితికి ఒక ఉదాహరణ. నిరంతరం పంపిణీ చేయబడిన ఫలితం యొక్క విలువ X. ఈ బైనరీ ఫలితం యొక్క సంచిత పంపిణిని కనుగొనేటప్పుడు తప్పనిసరిగా మిశ్రమ ఉమ్మడి సాంద్రతను ఉపయోగించాలి. ఎందుకనగా ఉప ఉత్పత్తి చలంకాలు (X, Y) సంభావ్యత సాంద్రత ఫంక్షన్ లేదా సంభావ్యత మాస్ ఫంక్షన్‌ని సమిష్టిగా కేటాయించలేని విధంగా మొదట్లో నిర్వచించబడతాయి. అధికారికంగా, f X, Y (x, y) యొక్క సంభావ్యత సాంద్రత ఫంక్షన్ (x, y) సంబంధిత మద్దతులపై ఉత్పత్తి కొలతకు సంబంధించి X మరియు Y ఉమ్మడి కుములేటివ్ పంపిణి ఫంక్షన్‌ని పునరుద్ధరించడానికి ఈ రెండింటిలో వేనినైనా ఉపయోగించవచ్చును

$$FX, Y(x, y) = \sum_{t \le y} \int_{s=-\alpha}^{x} f\ X, Y(S, t) ds.$$

వివిక్త మరియు నిరంతర యాదృచ్ఛిక చలంకాల యొక్క ఏకపక్ష సంఖ్యల మిశ్రమానికి నిర్వచనం సాధారణీకరిస్తుంది.

12.5 సంభావ్యత లక్షణాలు :

సంభావ్యత యొక్క లక్షణాలను ఈక్రింది విధంగా వివరించవచ్చును. అవి:

12.5.1. స్వతంత్ర చలకం కోసం ఉమ్మడి పంపిణి:

సాధారణంగా రెండు యాదృచ్ఛిక చలంకాలు X మరియు Y ఉమ్మడి సంచిత పంపిణి ఫంక్షన్ సంతృప్తి చెందినప్పుడు మాత్రమే స్వతంత్రంగా ఉంటాయి.

$$FX, Y(x, y) = FX(x).FY(y)$$

రెండు వివిక్త యాదృచ్ఛిక చలంకాలు X మరియు Y ఉమ్మడి సంభావ్యత మాస్ ఫంక్షన్ సంతృప్తి చెందినప్పుడు మాత్రమే స్వతంత్రంగా ఉంటాయి.

P($X = x$ మరియు $Y = y$) = P ($X = x$) P Y = అందరికోసం x మరియు y.

స్వతంత్ర యాదృచ్ఛిక సంఘటనల సంఖ్య పెరుగుతున్నప్పుడు, ప్రతికూల ఘాతాంక చట్టం ప్రకారం సంబంధిత ఉమ్మడి సంభావ్యత విలువ 0 కి వేగంగా తగ్గుతుంది.

అదేవిధంగా రెండు సంపూర్ణ నిరంతర యాదృచ్ఛిక చలంకాలు స్వతంత్రంగా ఉంటే

$$f X, Y (x, y) = f X (x). f Y (y)$$

అందరికోసం x మరియు y. దీనియొక్క అర్థం, యాదృచ్ఛిక చలంకాలలో ఒకటి లేదా అంతకంటే ఎక్కువ విలువ గురించి ఏదైనా సమాచారాన్ని పొందడం వలన దాని షరతులు లేని పంపిణికి సమానమైన ఏదైనా ఇతర చలంకాల యొక్క షరతులతో కూడిన పంపిణికి దారితీస్తుంది. అందువలన ఏ చలంకం ఏ ఇతర చలంకం గూరించి సమాచారాన్ని అందించదు.

12.5.2. షరతులతో కూడిన చలరాశుల కోసం ఉమ్మడి పంపిణి:

ఒక ఉప సమితి ఉంటే A చలరాశి యొక్క X_1, ... X_n మరొక ఉప సమితి ఇచ్చిన షరతులలో కూడినది. B ఈ చలకం యొక్క అప్పుడు ఉమ్మడి పంపిణి యొక్క సంభావ్యత మాస్ ఫంక్షన్ P(X_1, ... X_n).

P(X_1, ... X_n) సమానంగా P(B).P(A/B). కాబట్టి ఇది తక్కువ కొలతల సంభావ్యత పంపిణిల ద్వారా సమర్ధవంతంగా సూచించబడుతుంది. P(B) మరియు P(A/B). ఇటువంటి షరతులతో కూడిన స్వతంత్ర సంబంధాలు బయేసియన్ నెట్‌వర్క్ లేదా కొపులా ఫంక్షన్‌లతో సూచించబడతాయి.

12.5.3. కోవియరెన్స్:

సంభావ్యత స్థలంపై రెండు లేదా అంతకంటే ఎక్కువ యాదృచ్ఛిక చలంకాలు నిర్వచించబడతాయి. అవి ఎలా కలిసి మారతాయో వివరించడానికి ఉపయోగపడుతుంది. అంటే, చలంకాల మధ్య సంబంధాన్ని కొలవడానికి ఇది ఉపయోగపడుతుంది. రెండు యాదృచ్ఛిక చలంకాల మధ్య సంబంధం యొక్క సాధారణ కొలత కొవియారిన్స్. కొవియారెన్స్ అనేది యాదృచ్ఛిక చలంకాల మధ్య సరళ సంబంధాన్ని కొలవడం. యాదృచ్ఛిక చలంకాల మధ్య సంబంధం నాన్-లీనియర్ అయితే, కొవియారిన్స్ సంబంధానికి సున్నితంగా ఉండకపోవచ్చును. అనగా ఇవి రెండు చలంకాల మధ్య సహ సంబంధం కలిగి ఉండదు.

యాదృచ్ఛిక చలకం X మరియు Y యొక్క కొవియరెన్స్ Cov (X, Y) గా సూచించబడుతుంది.

$$\sigma XY = E[(X-N_x)(Y-N_y)]=E(XY)-N_xN_y.$$

12.5.4. సహసంబంధం:

రెండు యాదృచ్ఛిక చలంకాల మధ్య సంబంధం యొక్క మరొక కొలత ఉన్నది. ఇది తరచుగా కొవియారెన్స్ కంటే సులభంగా అర్థం చేసుకోవచ్చును.

సహసంబంధం ప్రతి చలనం యొక్క ప్రామాణిక విచలనం యొక్క ఉత్పత్తి ద్వారా కొవియారెన్స్‌ను కొతస్తుంది. దీని సర్యవసానంగా, సహసంబంధం అనేది కొలతలు లేని పరిమాణం, ఇది వేర్వేరు యూనిట్లలోని జతల చలంకాల మధ్య

సరళ సంబంధాలను స్వీకరించే X మరియు Y యొక్క ఉమ్మడి సంభావ్యత పంపిణిలో పాయింట్ల సానుకూల లేదా ప్రతికూల వాలు రేఖ వెంట పడిపోతే, P_{XY}+1 (లేదా -1) సమీపంలో ఉంటుంది. P_{XY}+1 లేదా -1 కి సమానం అయితే, సానుకూల సంభావ్యతను స్వీకరించే ఉమ్మడి సంభావ్యత పంపిణిలో పాయింట్లు సరిగ్గా సరళరేఖ వెంట పడతాయని చూపవచ్చును. ముఖ్యంగా సూన్య సహసంబంధం లేనప్పుడు అవి రెండు యాదృచ్ఛిక చలంకాలు పరస్పర సంబంధం కలిగి ఉన్నాయని చెప్పబడినది. కొవియారెన్స్ మాదిరిగానే, సహసంబంధం అనేది యాదృచ్ఛిక చలంకాల మధ్య సరళ సంబంధం యొక్క కొలత.

యాదృచ్ఛిక చలంకం X మరియు Y మధ్య సహ సంబంధం, ఇలా సూచించబడుతుంది.

$$PXY = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{V(X)V(Y)}} = \frac{\sigma XY}{\sigma X \sigma Y}$$

12.6. ముగింపు :

పైన వివరింపబడిన సంభావ్యతలో ముఖ్యమైనది. ఉమ్మడి సంభావ్యత మరియు ఉపాంత సంభావ్యతలను గురించి ఈ పాఠంలో చర్చించడమైనది. ఇందులో సంభావ్యత గురించిన పూర్తి విశ్లేషణ మరియు వాటి యొక్క ముఖ్యమైన ఉదాహరణల ద్వారా వివరించబడినది. అంతేకాకుండా ఉపాంత సంభావ్యత గురించిన విశ్లేషణకు కూడా చర్చించడమైనది. అంతేకాకుండా ముఖ్యమైన సంభావ్యత లక్షణాలను వివరించడమైనది.

12.7. మాదిరి పరీక్ష ప్రశ్నలు :

I వ్యాస రూప ప్రశ్నలు :

1) ఉమ్మడి సంభావ్యత అనగానేమి. వివరించండి ?

2) ఉపాంత సంభావ్యత అనగానేమి. విశ్లేషించండి ?

3) ఉమ్మడి మరియు ఉపాంత సంభావ్యతలను గురించి క్లుప్తంగా విశ్లేషించండి ?

II సంక్షిప్త వ్యాసరూప ప్రశ్నలు :

1) సంభావ్యత లక్షణాలను వివరించండి ?

2) ఉమ్మడి సంభావ్యతలను ఉదాహరణ ద్వారా వివరించండి ?

III సంక్షిప్త ప్రశ్నలు :

1) పాచికల కోడింగ్ ?

2) సహ సంబంధం ?

12.8. ఉపయుక్త గ్రంథాలు :

1. ఫెల్లర్, విలియం (1957). సంభావ్యత సిద్ధాంతం మరియు దాని అనువర్తనాలకు పరిచయం, వాల్యూమ్ 1, 3 వ ఎడిషన్ పేజీలు 217-218.

2. మోంట్ గోమేరి, డగ్లస్ సి. (2013). ఇంజనీర్‌కు అనువర్తిత గణాంకాలు మరియు సంభావ్యత. రంగర్, జార్జ్ సి (సిక్స్త్ ఎ డి) హోబోకేన్, N J.

3. పార్క్, కున్ఇల్ (2018). కమ్యూనికేషన్‌లకు అప్లికేషన్‌లతో సంభావ్యత మరియు యాదృచ్ఛిక ప్రక్రియల ప్రాథమిక అంశాలు స్ప్రింగర్.

4. సంభావ్యత మరియు గణాంకాలకు ఒక ఆధునిక పరిచయం. ఎందుకు మరియు ఎలా అర్థం చేసుకోవడం. డెక్కింగ్, మిచెల్ (1946). లండన్: స్ప్రింగర్ 2005.

5. Fundamentals of Mathematical Statistics: S.G. Gupra & V.K. Kappor, Publisher S. Chand & Co.

6. Basic Statistics by B.L. Agarwal, Third Edition, New Age International (P) Limited.

పాఠం - 13

ద్విపద పంపిణి

BINOMIAL DISTRIBUTION

పాఠ్య నిర్మాణ క్రమం :

13.0. ఉద్దేశ్యాలు

13.1. పరిచయం

13.2. ద్విపద పంపిణి నిర్వచనాలు

13.2.1. సంభావ్యత మాస్ ఫంక్షన్

13.2.2. సంచిత పంపిణి ఫంక్షన్

13.3. ద్విపద పంపిణి సిద్ధాంతం-లక్షణాలు

13.3.1. అంచనా విలువ మరియు వ్యత్యాసం

13.3.2. ద్విపద పంపిణి ఉన్నత లక్షణాలు

13.3.3. బహుళకం

13.3.4 మధ్యగతం

13.4. బౌర్నౌలీ పంపిణి

13.4.1. సాధారణ ఉజ్జాయింపు

13.4.2. పాయిజన్ ఉజ్జాయింపు

13.4.3. బీటా పంపిణి

13.4.4. యాదృచ్ఛిక సంఖ్య ఉత్పత్తి

13.5. ద్విపద పంపిణి యొక్క అర్ధం

13.6. ద్విపద పంపిణి యొక్క వైవిధ్యం

13.7. వైవిధ్యాన్ని అర్థం చేసుకోవడం

13.8. ముగింపు

13.9. మాదిరి పరీక్ష ప్రశ్నలు

13.10. ఆచూకి గ్రంథాలు

13.0. ఉద్దేశాలు :

- ద్విపద పంపిణి సిద్ధాంతంలో ప్రతి ఒక్క ప్రతిచయనం గణించేటప్పుడు ఒక అంశాన్ని పరిశీలించేటప్పుడు దానిని రెండు వర్గాలుగా విభజిస్తారు. దానినే నాణేం మరియు టాస్ (బొమ్మ, బొరుసు) రూపంలో ఫలితాన్ని కనుగొనడం జరుగుతుంది.

- ద్విపద పంపిణి సిద్ధాంతంలో కుటుంబ ఆదాయాలపై సర్వే చేసేటప్పుడు, ఆ కుటుంబాన్ని పేదవారు లేదా పేదవారు కాదు అనే అంశాన్ని ఆదాయంతో పోల్చి ఫలితాన్ని రాబట్టుటకు ఉపయోగపడుతుంది.

- ఉదాహరణకు గృహరంగంలో ప్రతి నెల ఆదాయం రూ.10,000/- ల కంటే తక్కువగా ఉన్నట్లయితే వారిని పేదవారిగా గుర్తించవచ్చును. అదేవిధంగా రూ.10,000/- ల కంటే అధికంగా ఉన్నట్లయితే వారిని పేదవారు కాని వారిగా గుర్తించవచ్చును.

- ద్విపద పంపిణి సిద్ధాంతం ప్రకారం విజయాలు మరియు అపజయాలతో ముడిపడి ఉంటాయి.

13.1. పరిచయం :

సంభావ్యత సిద్ధాంతం మరియు గణాంకాలలో 'n' మరియు 'P' పారామితులతో ద్విపద పంపిణి అనేది 'n' స్వతంత్ర ప్రయోగాల శ్రేణిలో విజయాల సంఖ్య యొక్క వివిక్త సంభావ్యత పంపిణి, ప్రతి ఒక్కటి అవును, కాదా లనే ప్రశ్నను అడుగుతుంది మరియు ప్రతిదాని స్వంత బులియన్ విలువైన ఫలితం. విజయం లేదా వైఫల్యం (సంభావ్యతలో q=1-P). ఒక విజయం లేదా వైఫల్య ప్రయోగాన్ని బెర్నౌలీ ప్రయోగం మరియు ఫలితాల క్రమాన్ని బౌర్నౌలీ ప్రక్రియ అంటారు. ద్విపద పంపిణి అనేది గణాంక ప్రాముఖ్యత యొక్క ప్రసిద్ధి ద్విపద పరీక్షణ ఆధారం.

13.2. ద్విపద పంపిణి నిర్వచనాలు :

ద్విపద పంపిణి నిర్వచనాన్ని ఈక్రింది విధంగా నిర్వచించవచ్చును. అవి:

13.2.1. సంభావ్యత మాస్ ఫంక్షన్ :

సాధారణంగా, యాదృచ్ఛిక వేరియబుల్ ' Xn ∈ ' పారమితులతో ద్విపద పంపిణిని అనుసరిస్తే 'N' మరియు $P \in [0,1]$ లను మనం $X \sim B(n, p)$ అని వ్రాస్తారు. n స్వతంత్ర బౌర్నౌలీ ట్రయల్స్‌లో ఖచ్చితంగా K విజయాలను పొందే సంభావ్యత మాస్ ఫంక్షన్ ద్వారా ఇవ్వబడుతంది.

$$f\ (K, n, p) = \mathrm{P^r}(K; n, p) = \mathrm{P_r}(X = K) = \binom{n}{k} P^K (1-P)^{n-k}$$

K = 0, 1, 2 .... ఎక్కడ

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

ద్విపద గుణకం, అందుకే పంపిణి పేరు, సూత్రాన్ని క్రింది విధంగా వివరించవచ్చును.

K విజయాల సంభావ్యత P^K మరియు $n-k$ వైఫల్యాల సంభావ్యత $(1-P)^{n-k}$ అయినప్పటికీ, K విజయాలు n ట్రయల్స్‌లో ఎక్కడైన సంభవించవచ్చును. అదేవిధంగా $\binom{n}{k}$ ట్రయల్స్‌ల క్రమంలో K విజయాలను పంపిణి చేయడానికి మార్గాలు.

ద్విపద పంపిణి సంభావ్యత కోసం సూచన పట్టికలను రూపొందించడంలో, సాధారణంగా పట్టిక $\frac{n}{2}$ విలువల వరకు పూరించబడుతుంది. ఎందుకంటే $K > \frac{n}{2}$ కోసం, సంభావ్యతను దాని పూరకంగా లెక్కించవచ్చును.

$$f\ (K, n, p) = f\ (n-K, n, 1-P).$$

K యొక్క విధిగా $f\ (K, n.p)$ వ్యక్తీకరిణను చూసినట్లయితే దానిని గరిష్టికరించే K విలువ ఉన్నది. ఈ K విలువను గణించడం ద్వారా కనుగొనవచ్చును.

$$\frac{f(k+1, n, p)}{f(k, n, p)} = \frac{(n-k)P}{(k+1)(1-P)}$$

మరియు దానిని 1 తో పోల్చడం. ఎల్లప్పుడూ సంతృప్తినిచ్చే పూర్ణాంకం M ఉంటుంది.

$$(n+1)\ P - 1 \le M\ < (n+1)P.$$

$f\ (K, n, p)$అనేది $K < M$ కోసం పెరుగుతున్న మోనోటోన్ మరియు $K > M$ కోసం మోనోటోన్ తగ్గుతుంది.

$(n+1)^P$ అనేది పూర్ణాంకం అయిన సందర్భం మినహా ఈ సందర్భంలో f గరిష్టంగా ఉండే రెండు విలువలు ఉన్నాయి. $(n+1)^P$ మరియు $(n+1)^{P-1}$ M అనేది అత్యంత సంభావ్య ఫలితం. బెర్నౌలీ ట్రయల్‌ని మరియు దీనిని మోడ్ అంటారు.

ఉదాహరణ :

ఒక పక్షపాత నాణేం విసిరినప్పుడు సంభావ్యత **0.3** తో వస్తుంది అనుకుందాం. '**6**' టాసులలో సరిగ్గా '**4**' తలలు (హెడ్స్) కనిపించే సంభావ్యత.

$$f(4,6,0,3) = \binom{6}{4} 0.3^4 (1-0.3)^{6-4}$$

$$= 0.059535.$$

13.2.2. సంచిత పంపిణి ఫంక్షన్ :

సంచిత పంపిణి ఫంక్షన్‌ను ఈ క్రింది విధంగా వివరించవచ్చును.

$$f(k,n,p) = \mathrm{P_r}(X \le K)$$

$$= \sum_{i=o}^{[k]} \binom{n}{i} P^i (1-P)^{n-i},$$

ఇందులో $[k]$ K క్రింద ఉన్న ఫ్లోర్ అనగా k కంటే తక్కువ లేదా సమానమైన గొప్ప పూర్ణాంకం.

దీనిని ఈ క్రింది విధంగా క్రమబద్దీకరించబడిన అంసపూర్ణ బీటా ఫంక్షన్ పరంగా కూడా సూచించబడుతుంది.

$$f(k,n,p) = \mathrm{P_r}(X \le K)$$

$$= I_{1-K}(n-K, k+1)$$

$$= (n-k)\binom{n}{k} \int_0^{1-P} t^{n-k-1} (1-t)^k \, dt.$$

ఇది F పంపిణి యొక్క సంచిత పంపిణి ఫంక్షన్‌కు సమానం.

$$f(k,n,p) = F_F \text{ పంపిణి } \left(x = \frac{1-Pk+1}{P\,n-k}; d_1 = 2(n-k), d_2 = 2(k+1) \right).$$

13.3. ద్విపద పంపిణి సిద్ధాంతం-లక్షణాలు :

ద్విపద పంపిణి సిద్ధాంతం యొక్క లక్షణాలను ఈ క్రింది విధంగా వివరించవచ్చును. అవి:

13.3.1. అంచనా విలువ మరియు వ్యత్యాసం :

$X \sim B(n, P)$ అనగా X అనేది ద్విపదంగా పంపిణి చేయబడిన యాదృచ్ఛిక చలంకం n అనేది మొత్తం ప్రయోగాల సంఖ్య మరియు P ప్రతి ప్రయోగం యొక్క అంచనా విలువ.

$$E[X] = nP.$$

X అనేది n ఒకేలా ఉండే బెర్నౌలీ యాదృచ్ఛిక వేరియబుల్స్ యొక్క మొత్తం. ప్రతి ఒక్కటి ఊహించిన విలువ యొక్క రేఖీయత నుండి అనుసరిస్తుంది.

అదేవిధంగా $X_1..........X_n$ ఒకేలా ఉంటాయి మరియు స్వతంత్రంగా ఉంటాయి. బౌర్నౌలీ యాదృచ్ఛిక వేరియబుల్స్ P పరామితితో అప్పుడు.

$$X = X_1 + ... + X_n \text{ మరియు}$$

$$E[X] \quad = E[X_1 + ... + X_n]$$

$$= E[X_1] + ...+]$$

$$= E[X_1] + ...E[X_n]$$

$$= P + \; .$$

13.3.2. ద్విపద పంపిణి ఉన్నత లక్షణాలు :

మొదటి '6' కేంద్ర లక్షణాలు వీటిని ఈ క్రింది విధంగా వివరించబడినది.

$N_c = E[(X - E[X])^c]$ ద్వారా ఇవ్వబడ్డాయి.

$\mu_1 \quad = 0,$

$\mu_2 \quad = np(1-p),$

$\mu_3 \quad = np(1-p)(1-2p),$

$\mu_4 \quad = np(1-p)(1+(3n-6)p(1-p)),$

$\mu_5 \quad = np(1-p)(1-2p)(1+(10n-12)p(1-p)),$

$\mu_6 \quad = np(1-p)(1-30p)(1-p)(1-4p(2-p)+5np(1-p)(5-26p(1-p)+15n^2p^2(1-p^2).$

కేంద్రీకృత లక్షణాలు సంతృప్తి చెందుతాయి.

$$E[X] = np,$$

$$E[X^2] = np(1-p) + n^2p^2,$$

సాధారణంగా $$E[X^c\ ] = \sum_{k=o}^{c} \{^c_k\} n^k - p^k,$$

ఇక్కడ $\{^c_k\}$ రెండవ రకమైన స్టిర్లింగ్ సంఖ్యలు మరియు $n^k = n(n-1)........(n-k+1)$ ఉన్నది k యొక్క పడే శక్తి n. అధిక పాయిజన్ లక్షణాల ద్వారా ద్విపద లక్షణాలను బందించడం ద్వారా ఒక సాధారణ బౌండ్ అనుసరిస్తుంది.

$$\left(\frac{c}{\log(c/(np)+1}\right)^c \le (np)^c \exp\left(\frac{c^2}{2np}\right).$$

ఉన్నట్లయితే అప్పుడు $C = O(\sqrt{np})$ అవుతుంది. అప్పుడు $E[X^c]$ నుండి గరిష్టంగా స్థిరమైన అంశం $E[X]^c$ ఉన్నట్లయితే $C = (\sqrt{np})$, అప్పుడు $E[X^c]$ నుండి గరిష్టంగా స్థిరమైన అంశం $E[X]^c$ అవుతుంది.

13.3.3. బహుళకం:

సాధారణంగా ద్విపద $B(n,P)$ పంపిణి యొక్క బహుళకం సమానంగా ఉంటుంది. $[(n+1)P]$ ఎక్కడ $[.]$

అనేది ఫోర్ ఫంక్షన్. అయితే $(n+1)P$ పూర్ణాంకం మరియు P^0 లేదా 1 కానప్పుడు, పంపిణీకి రెండు బహుళకాలు ఉంటాయి. అవి: $(n+1)P$ మరియు $(n+1)P^{-1}\ P^0$ కు సమానంగా ఉన్నప్పుడు లేదా '1' బహుళకం, '0' మరియు 'n' తదనుగుణంగా ఉంటుంది. దీనిని ఈ క్రింది విధంగా వివరించవచ్చును.

బహుళకం $\left\{\begin{array}{ll} [(n+1)P] & \text{అయితే } (n+1)P\,'0' \text{ లేదా ప్రతిపాదించబడును,} \\ (n+1)P \text{ మరియు } (n+1)P-1 & \text{అయితే } (n+1)P \in \{1, ... n\}, \\ n & \text{అయితే } (n+1)P = n+1. \end{array}\right\}$

అప్పుడు $f(k)=\binom{n}{k}p^k q^{n-k}$

$p=$ 0 మాత్రమే $f(0)$ తో శూన్యవిలువ కాని విలువను కలిగి ఉంటుంది. $f(0)=1$ కోసం $P=1$ ని కొనుగొనబడినది. $f(n)=1$ మరియు $f(k)=0$ కోసం $k \neq n$ బహుళకం '0' అని ఇది రుజువు చేస్తుంది.

$p=0$ మరియు n కోసం $P=1$.

13.3.4. మధ్యగతం:

సాధారణంగా, ద్విపద పంపిణికి మధ్య స్థానాన్ని కనుగొనడానికి ఏ ఒక్క ఫార్ములా లేదా మరియు ఇది ప్రత్యేకం కానిది కూడా కావచ్చును. అయితే, అనేక ప్రత్యేక ఫలితాలు స్థాపించబడినాయి.

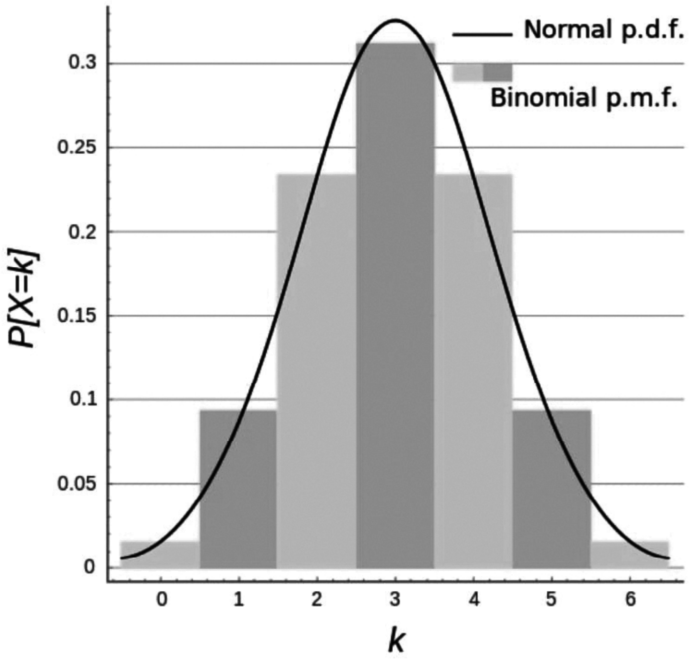
- np పూర్ణాంకం అయితే, సగటు, మధ్యగతం మరియు బహుళకం సమానంగా మరియు సమానం np.
- ఏదైనా మధ్యస్థం 'M' తప్పనిసరిగా విరామం $[np] \leq m \leq [np]$ లోపల ఉండాలి.
- మధ్యగతం 'm' సగటు నుండి చాలా దూరంగా ఉండకూడదు.
- మధ్యగతం ప్రత్యేకమైనది మరియు m = రౌండ్ (np) కి సమానం అయినప్పుడు $[m-np] \leq (p, l-p)$ సందర్భం మినహా $\frac{1}{2}$ మరియు 'n' అనేది బేసిసంఖ్య.
- $P=\frac{1}{2}$ మరియు 'n' బేసి సంఖ్య అయినప్పుడు విరామంలో ఏదైనా సంఖ్య $m\frac{1}{2}(n-1) \leq \frac{1}{2}(n+1)$ అనేది ద్విపద పంపిణి యొక్క మధ్య గతం $P=\frac{1}{2}$ మరియు 'n' సమానంగా ఉంటే $m=\frac{n}{2}$ అనేది ప్రత్యేకమైన మధ్యగతం.

13.4. బౌర్నౌలీ పంపిణి :

బౌర్నౌలీ పంపిణి అనేది ద్విపద పంపిణి యొక్క ప్రత్యేక సందర్భం. ఇక్కడ $n=1$ ప్రత్యేకాత్మకంగా $X \sim B(1, p)$ కి $X \sim$ బౌర్నౌలీ (p) అనే అర్థం ఉంటుంది. దీనికి విరుద్ధంగా, ఏదైనా ద్విపద పంపిణి, $B(n, p)$ అనేది $'n'$ స్వతంత్ర బౌర్నౌలీ ట్రయల్స్ మొత్తం పంపిణి, బౌర్నౌలీ (p), ప్రతి ఒక్కటి ఒకే సంభావ్యత $'p'$.

13.4.1. సాధారణ ఉజ్జాయింపు:

దీనిని ద్విపద నిష్పత్తి నిస్వస విరామం లేదా సాధారణ ఉజ్జాయింపు విరామం అంటారు. దీనిని ఈక్రింది రేఖా చిత్రంలో వివరించవచ్చును.



సాధారణ సంభావ్యత పంపిణి

ద్విపద సంబావ్యత పంపిణి

పై రేఖా చిత్రంలో $'n'$ తగినంత పెద్దవైతే, పంపిణి యొక్క వక్రత చాలా పెద్దది కాదు. ఈ విధంగా $B(n, p)\times$ కి సహేతుకమైన ఉజ్జాయింపు సాధారణ పంపిణి ద్వారా ఇవ్వబడుతుంది.

$$N(np, np(1-P)),$$

మరియు ఈ ప్రాథమిక ఉజ్జాయింపు తగిన కొనసాగింపు దిద్దుబాటును ఉపయోగించడం ద్వారా సరళమైన మార్గంలో మెరుగుపరచబడుతుంది. ప్రాథమిక ఉజ్జాయింపు సాధారణంగా $'n'$ పెరిగే కొద్ది మెరుగుపడుతుంది మరియు $'PO'$ లేదా $'1'$ కి సమీపంలో లేనప్పుడు మెరుగ్గా ఉంటుంది. $'n'$ అనేది తగినంత పెద్దదా కాదా అని నిర్ణయించడానికి వివిధ నియమాలను ఉపయోగించవచ్చును.

ఒక నియమం $n > 5$ కోసం సాధారణ ఉజ్జాయింపు వైషమ్యాన్ని యొక్క సంపూర్ణ విలువ ఖచ్చితంగా $\frac{1}{3}$ కంటే ఎక్కువగా ఉన్నట్లయితే సరిపోతుంది. అంటే:

$$\frac{[1-2p]}{\sqrt{np(1-p)}} = \frac{1}{\sqrt{n}}\left[\sqrt{\frac{1-P}{P}} - \sqrt{\frac{P}{1-P}}\right] - < \frac{1}{3}.$$

ఇది బేర్రీ ఎస్సీన్ సిద్ధాంతాన్ని ఉపయోగించి ఖచ్చితమైనదిగా చెప్పవచ్చును.

ఒక బలమైన నియమం దాని సగటు యొక్క 3 ప్రామాణిక విచలనాలలో ప్రతీది సాధ్యమైన విలువల పరిధిలో ఉన్నట్లయితే మాత్రమే సాధారణ ఉజ్జాయింపు సముచితమని పేర్కొన్నది. అంటే, మాత్రమే:

$$\mu \pm 3\sigma = np \pm 3\sqrt{np(1-p)} \in (0, n).$$

ఈ 3 ప్రామాణిక విచలనం నియమం ఈక్రింది షరతులకు సమానం. ఇది పైన పేర్కొనబడిన మొదటి నియమాన్ని కూడా సూచిస్తుంది.

$$n > 9\left(\frac{1-p}{p}\right) \text{ మరియు } n > 9\left(\frac{p}{1-p}\right)$$

ఉదాహరణకు, ఒక ప్రాంతంలోని జనాభా లోని వ్యక్తులకు యాదృచ్ఛికంగా శాంపిల్స్ తీసుకొని, వారు నిర్దిష్ట ప్రకటనలతో ఏకీభవిస్తున్నారా అని వారిని అడగండి. 'n' వ్యక్తుల సమూహాలు పదే పదే మరియు నిజంగా యాదృచ్ఛికంగా నమూనా చేయబడితే, జనాభాలో మరియు ప్రామాణిక విచలనంతో ఒప్పందం యొక్క నిజమైన నిష్పత్తి 'p' కి సమానమైన సగటుతో నిష్పత్తులు సుమారుగా సాధారణ పంపిణిని అనుసరిస్తాయి.

13.4.2. పాయిజన్ ఉజ్జాయింపు :

ఉత్పత్తి 'np' స్థిరంగా ఉన్నప్పుడు లేదా కనీసం 'p' సున్నాకి మారినప్పుడు ట్రయల్స్ సంఖ్య అనంతానికి వెళ్ళడం వలన ద్విపద పంపిణి, పాయిజన్ పంపిణి వైపు కలుస్తుంది. కాబట్టి పరామితి $\lambda = np$ తో పాయిజన్ పంపిణిని 'n' తగినంత పెద్దది మరియు 'p' తగినంత చిన్నది అయినట్లయితే ద్విపద పంపిణి యొక్క $B(n, p)$ కి ఉజ్జాయింపుగా ఉపయోగించవచ్చును. రెండు నియమాల ప్రకారం, ఈ ఉజ్జాయింపు $n \geq 20$ మరియు $p \leq 0.05$ లేదా $n \geq 100$ మరియు $np \leq 10$ అయితే మంచిది.

13.4.3. బీటా పంపిణి :

బైనామిల్ పంపిణి మరియు బీటా పంపిణి అనేవి రిపీట్ బౌర్నౌలీ ట్రయల్స్ యొక్క ఒకే మోడల్ యొక్క విభిన్న వీక్షణలు. ద్విపద పంపిణి అనేది 'K' విజయాల యొక్క స్వతంత్ర ఈవెంట్లు. ప్రతి ఒక్కటి విజయం యొక్క సంభావ్యత 'P' తో ఇవ్వబడినాయి. గణిత శాస్త్ర పరంగా, $a = k+1$ మరియు $\beta = n-k+1$ బీటా పంపిణి మరియు ద్విపద పంపిణి $n+1$ కారకంతో సంబంధం కలిగి ఉంటాయి.

13.4.4. యాదృచ్ఛిక సంఖ్య ఉత్పత్తి :

ఉపాంత పంపిణి ద్విపద పంపిణి అయిన యాదృచ్ఛిక సంఖ్య ఉత్పత్తికి సంబంధించిన పద్ధతులు బాగా స్థిరపడినవి. ద్విపద పంపిణి నుండి యాదృచ్ఛిక వైవిద్యాల నమూనాలను రూపొందించడానికి ఒక మార్గం విలోమ అల్గారిథమ్‌ను ఉపయోగించడం. ఆ విధంగా చేయడానికి '0' నుండి 'n' వరకు ఉన్న 'K' అన్ని విలువలకు $P_r(X=k)$ సంభావ్యతను గణించాలి. ఆ తరువాత మొత్తం ర్యాండమ్ సంఖ్య ఏర్పరచి ఉపయోగించడం ద్వారా '0' మరియు '1' ల మధ్య ఏకరీతిగా నమూనాలను రూపొందించడానికి, మొదటి దశలో లెక్కించిన నమూనాలను వివిక్త సంఖ్యలుగా మార్చవచ్చును.

13.5. ద్విపద పంపిణి యొక్క అర్ధం :

ఒక గిన్నెలో మీకు మూడు ఆకుపచ్చ గోళీలు మరియు ఒక ఎర్ర పాలరాయి ఉన్నాయని అనుకొందాం. మీ ప్రయోగంలో, మీరు ఒక పాలరాయిని ఎంచుకొని, అది ఎరుపు రంగులో ఉంటే “విజయం” లేదా ఆకుపచ్చ ఉంటే “వైఫల్యం” అని రికార్డ్ చేసి, ఆపై మీరు పాలరాయిన తిరిగి ఉంచి, మళ్ళీ ఎంచుకోండి. విజయం యొక్క సంభావ్యత ... ఎరుపు ఎర్ర పాలరాయిని ఎంచుకోవడం. నలుగురిలో ఒకటి లేదా ¼ ఇది 0.25. మీరు 100 సార్లు ప్రయోగం చేసినట్లయితే, మీరు ఎర్ర పాలరాయిన నాలుగింట ఒకవంతు లేదా మొత్తం 25 సార్లు చేయాలని ఆశిస్తారు. ఇది ద్విపద పంపిణి యొక్క సగటు, ఇది ట్రయల్స్ సంఖ్య, 100, ప్రతి టయల్ విజయానికి సంభావ్యత, 0.25 లేదా 100 రెట్ల 0.25, ఇది 25 కి సమానం.

13.6. ద్విపద పంపిణి యొక్క వైవిధ్యం :

మీరు 100 గోళీలను ఎంచుకున్నప్పుడు, మీరు ఎల్లప్పుడు సరిగా 25 ఎరుపు పాలరాయిలను ఎన్నుకోరు, మీ యొక్క వాస్తవ ఫలితాలు మారుతూ ఉంటాయి. విజయం యొక్క సంభావ్యత "P" "¼" లేదా “0.25” అయితే, వైఫల్యం యొక్క సంభావ్యత "¾" లేదా “0.75”, అంటే “$(1-P)$” వ్యత్యాసాన్ని "P" సార్లు $(1-P)$ ప్రయత్నాల సంఖ్యగా నిర్వచించారు. పాలరాయి ప్రయోగం కోసం వ్యత్యాసం 100 రెట్లు “0.25” రెట్లు “0.75” లేదా “18.75”.

13.7. వైవిధ్యాన్ని అర్థం చేసుకోవడం :

వైవిధ్యం చదరపు యూనిట్లు ఉన్నందున, ఇది సగటు వలె స్పష్టంగా లేదు. అయినప్పటికి, మీరు ప్రామాణిక విచలనం అని పిలువబడే వైవిధ్యం యొక్క వర్గమూలాన్ని తీసుకుంటే, మీ వాస్తవ ఫలితాలు సగటున ఎంత మారుతూ ఉంటాయో మీరు ఆశించవచ్చును. “18.75” యొక్క వర్గమూలం “4.33”. అనగా ప్రతి 100 ఎంపికలకు ఎరుపు పాలరాయిల సంఖ్య 21 (25-4) మరియు 29 (25+4) మధ్య ఉంటుందని ఆశించవచ్చును.

13.8. ముగింపు :

ద్విపత పంపిణి సిద్ధాంతం ప్రకారం ప్రతి ప్రశ్నకు అవును మరియు కాదు అనే దానిని అడుగుతుంది. అంతేకాకుండా ఒక విజయం లేదా వైఫల్యం యొక్క ప్రయోగాన్ని బౌర్నౌలి ట్రయల్ అని అంటారు. ద్విపద పంపిణి సిద్ధాంతం యొక్క లక్షణాలు ప్రకారం అంచనా విలువ మరియు వ్యత్యాసాన్ని తెలియజేయుటకు ఉపయోగపడుతుంది. వీటికి కొన్ని కేంద్ర లక్షణాలు ఉంటాయి. ముఖ్యంగా బహుళకం, మధ్యగతం ద్వారా ద్విపద పంపిణిని కనుగొనవచ్చును. అంతేకాకుండా ద్విపద పంపిణి సిద్ధాంతం సాధారణంగా కొన్ని ఉజ్జాయింపులపై ఆధారపడి ఉంటుంది. అందులో ముఖ్యమైనది సాధారణ ఉజ్జాయింపు మరియు పాయిజన్ ఉజ్జాయింపు ద్వారా కనుగొనవచ్చును. ద్విపద పంపిణి సిద్ధాంతం ప్రకారం దాని సంభావ్యతను తెలుసుకొనుటకు సిద్ధాంతం యొక్క వైవిధ్యం ద్వారా పరిశీలించవచ్చును.

13.9. మాదిరి పరీక్ష ప్రశ్నలు :

I వ్యాస రూప ప్రశ్నలు :

1. ద్విపద పంపిణి సిద్ధాంతాన్ని ఉదాహరణల ద్వారా వివరించండి ?
2. ద్విపద పంపిణి సిద్ధాంతం అనగానేమి ? దాని లక్షణాలను వివరించండి ?
3. ద్విపద పంపిణి సిద్ధాంతాన్ని విశ్లేషణాత్మకంగా వివరించండి ?

II సంక్షిప్త వ్యాసరూప ప్రశ్నలు :

1. ద్విపద పంపిణి సిద్ధాంతం యొక్క లక్షణాలను తెలియజేయండి ?

III సంక్షిప్త ప్రశ్నలు :

1. బహుళకం మరియు మధ్యగతం
2. సాధారణ ఉజ్జాయింపు రేఖా చిత్రం ద్వారా వివరించండి ?
3. ద్విపద పంపిణి సిద్ధాంతం యొక్క అర్థం వివరించండి ?

13.10. ఆచూకి గ్రంథాలు :

1. వెస్ట్‌ల్యాండ్, J. క్రిష్టోఫర్ (2020). ఆడిట్ అనలిటిక్స్: అకౌంటింగ్ వృత్తి కోసం డేటా సైన్స్. చికాగో, IL USA స్ప్రింగర్ P 53.

2. ఫెల్లర్, W. (1968). యాన్ ఇంట్రడక్షన్ టూ ప్రాబబిలిటి థియరి అండ్ ఇట్స్ అప్లికేషన్స్ (మూడవ ప్రచురణ), న్యూయార్క్: విలే. P 151.

3. వాడ్స్ వర్త్, G.P. (1960). సంభావ్యత మరియు కాంటమ్ వేరియబుల్స్ పరిచయం, న్యూయార్క్: మెక్ గ్రాహిల్ P 52.

4. హంజా, K. (1995) "ద్విపద మరియు పాయిజన్ పంపిణీల వ్యవస్థ మరియు మధ్యస్థం మధ్య దూరంపై అతి చిన్న ఏకరీతి ఎగువ సరిహద్దు". గణాంకాలు & సంభావ్యత లేఖలు. 23: 21-25.

5. రజాఘి, మెహదీ (2002). "నమూనాలో సున్నా సంభావ్యంతో ద్విపద విజయ సంభావ్యత అంచనాపై. "జర్నల్ ఆఫ్ మోడరన్ అప్లైడ్ స్టాటిస్టికల్ మెథడ్స్" (2): PP 326-332.

6. విల్సన్, ఎడ్విన్ (1927). "సంభావ్యత అనుమితి, వారసత్వ చట్టం మరియు గణాంక అనుమితి". జర్నల్ ఆఫ్ ది అమెరికన్-స్టాటిస్టికల్ అసోసియేషన్, 22 (158): PP 209-212.

7. బ్రౌన్, లారెన్స్ డి, K.T. టోనే; దాస్ గుప్తా, అనిర్బన్. (2001). బైనోమియల్.

పాఠం 14

పాయిజాన్ విభాజనం

ఉద్దేశ్యం

ఈ పాఠ్యభాగం చదివిన తరువాత మీరు ఈ క్రింది అంశాలను తెలుసుకోగలరు.

* పాయిజాన్ విభాజనం పై నిర్దిష్టమైన అవగాహన ఏర్పడి ప్రయోజనాలు తెలుసుకొనవచ్చు.

పాఠ్య నిర్మాణ క్రమం :

14.1 పాయిజాన్ విభాజన వివరణ

14.2 పాయిజాన్ విభాజన లక్షణములు

14.3 పాయిజాన్ విభాజనానికి అనువర్తిత ఉదాహరణలు

14.4 అభ్యాసము

14.1 పాయిజాన్ విభాజన వివరణ (Explain the poisson distribution) :

ప్రయోగముల సంఖ్య అనంతముగా ఉన్నప్పుడు, అనుకూల సంభావ్యత చాలా తక్కువగా ఉంటే, అటువంటి ప్రయోగాలు పాయిజాన్ విభాజనము క్రిందికి వస్తాయి. ఇది ఒక విచ్ఛిన్న విభాజనము. ఇది ద్విపద విభాజనమునకు అవధి ఈ క్రింది నియమాలతో అవుతుంది.

1. n విలువ అనంతము అనగా $n \rightarrow \infty$

2. ప్రతి యత్నములో సఫలము యొక్క స్థిర సంభావ్యత p, మిక్కిలి చిన్న సంఖ్య *i.e.* $p \rightarrow 0$

3. $np = \lambda$ పరిమితము కావున $p = \lambda/n$ మరియు $q = 1-\frac{\lambda}{n}$ ఇక్కడ λ పాయిజాన్ పరామితి

నిర్వచనము:

ఒక చలరాశి 'X' విలువలు తీసుకొంటూ, సంభావ్యత ప్రమేయము

$$P(x,\lambda) = P(X = x)_n = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}\ ;\ x = 0,1,2,\ldots\ldots\ldots = 0$$

మిగిలినపుడును పాటించిన X పాయిజాన్ విభాజనమును పాటించును అంటారు. ఇక్కడ λ, ను పరామితి అందురు.

$\lambda > 0$

14.2 పాయిజాన్ విభాజన లక్షణములు:

1. పాయిజాన్ విభాజనములో మధ్యమము = విస్తృతి $=\lambda$.

2. దీనిలో ఒకే ఒక పరామితి λ.

3. పాయిజాన్ విభాజనం బాహుళకము, λ పూర్ణాంకమైనపుడు λ కు, గానపుడు $[\lambda]+1$ కు సమానమవుతుంది.

   ఇక్కడ $[\lambda]$ అనేది λ లో పూర్ణాంక భాగమును సూచిస్తుంది.

4. స్వతంత్ర పాయిజాన్ చలరాశుల మొత్తము కూడా ఒక పాయిజాన్ చలరాశే అవుతుంది.

5. X పాయిజాన్ యాధృచ్ఛిక అనుకోండి దీని పరామితి m అయితే

   $f(x+1)=\dfrac{m}{x+1}f(x)$ ను అవృత్తి సూత్రము అంటారు.

14.3 పాయిజాన్ విభాజనపు అనువర్తిత ఉదాహరణలు :

ఉదాహరణ - 1:

2 పరామితి గల X ఒక పాయిజాన్ యాదృచ్ఛిక $P(X \geq 1)$ విలువ ఎంత?

జవాబు:

X, పాయిజాన్ యాదృచ్ఛిక కాబట్టి X యొక్క సంప్రాంప్ర

$$f(x)=\frac{e^{-2}2^x}{x!}\ ;\ x=0,1,2,.........$$

$$=0 \quad \text{అలాకాకుంటే}$$

$$P(X \geq 1)=1-P(X=0)$$

$$=1-f(0)$$

$$=1-e^{-2}=0.865$$

ఉదాహరణ - 2:

20, 21 సంవత్సరాల మధ్య గల 53,889 యువకులను మిల్టరి ఉద్యోగం కోసం పరీక్ష చేస్తే అందులో 1,374 మందికి దృష్టిలో లోపం ఉన్నది. ఇదే వయస్సు గల 50 మంది యువకులను యాదృచ్ఛికంగా తీసుకొంటే, వరుసగా 0, 1, 2, 3, ... యువకులు దృష్టిలో లోపం కలిగి ఉండటానికి సంభావ్యతను కనుగొనండి.

జవాబు:

53,889 మంది యువకులలో 1,374 గురికి దృష్టిలో లోపం ఉన్నది. కాబట్టి దృష్టి లోపం కలవారి శాతము $=2.55=\frac{1374}{53889}$

మందిలో దృష్టిలో లోపం గలవారి సరాసరి $=50\times\frac{2.55}{100}$

$$=1.275$$

ఇది పాయిజాన్ విభాజనం యొక్క పరామితి m కు సమానము కాబట్టి $\lambda=1.275$

$$P(X=0)=f(0)=e^{\lambda}=e^{-1.275}$$

$$P(X=2)=f(2)=\frac{e^{-m}m^2}{2!}\ \ 0.227$$

$$P(X=3)=f(3)=\frac{e^{-m}m^3}{3!}\ \ 0.098$$

$$P(X=4)=f(4)=\frac{e^{-m}m^4}{4!}\ \ 0.31$$

$$P(X=5)=f(5)=\frac{e^{-m}m^5}{5!}\ \ 0.008$$

$\therefore$ యాదృచ్ఛికంగా తీసుకుంటే 50 మందిలో దృష్టిలో లోపం లేకపోతే సంభావ్యత 0.279. అందులో ఒక్కరికి మాత్రమే దృష్టి లోపం ఉండే సంభావ్యత 0.356, మూడు కంటే ఎక్కువ కాకుండా దృష్టిలో లోపం ఉన్నవారికి సంభావ్యత

$$=f(0)+f(1)+f(2)+f(3)$$

$$=0.958$$

ఉదాహరణ - 3:

మోటారు కారులను అద్దెకు ఇచ్చే సంస్థలో రెండు మోటారులున్నాయి. ప్రతి దినము మోటారుల గిరాకీ సంఖ్య 1.5, పరామితి గల పాయిజాన్ యాదృచ్ఛిక అంటే?

1. ఒక్క మోటారును ఉపయోగించకపోవడాన్ని

2. మోటారుల గిరాకిని, నిరాకరించడానికున్న సంభావ్యతను కనుక్కోండి.

జవాబు:

మోటారుకు X గిరాకీలు వచ్చే రోజుల సంభావ్యత

$$P(X=x)=\frac{e^{-1.5}(1.5)^{x}}{x!}$$

ఎందుకంటే రోజుకు మోటారు గిరాకీల సంఖ్య 1.5 పరామితి గల పాయిజాన్ యాదృచ్ఛిక

1. మోటారు గిరాకీ లేకుండా ఉండే సంభావ్యత $P(X=0)=e^{-1.5}=0.2231$

2. మోటారు గిరాకీని నిరాకరించే సంభావ్యత $P(X\geq 2)$

$$=1-P(X\geq 2)$$

$$=1-\left[P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)\right]$$

$$=1-e^{-1.5}\left[1+1.5+\frac{1.5^{2}}{2!}\right]$$

$$=1-0.2231\times 3.625$$

$$=1-0.80874$$

$$=0.19126$$

ఉదాహరణ - 4:

ఒక ఆసుపత్రి సాధారణంగా రోజుకు 50 రోగులను చేర్చుకొంటుంది. సరాసరిన 100కి ముగ్గురు రోగులు ప్రత్యేక గదులలో ప్రత్యేక సదుపాయాలు కోరుతారు. ఒక రోజు ఉదయము, అటువంటి మూడు గదులు ఖాళీగా ఉన్నాయి. 50 రోగులను తీసుకొన్నారని అనుకుంటే, ముగ్గురు కంటే ఎక్కువ రోగులకు ప్రత్యేక గదులు కావలసిన సంభావ్యత ఎంత?

జవాబు:

ఒక వ్యక్తికి ప్రత్యేక గదులు సదుపాయాలతో కావలసిన సంభావ్యత $P=\frac{3}{100}=0.03$

$$\lambda:\ np=50\times 0.03$$

$$=1.5$$

$$\therefore n=50$$

P విలువ చిన్నది కావడం వలన పాయిజాన్ విభాజనాన్ని ఉపయోగించవచ్చు.

X రోగులు ప్రత్యేక గదులు కోరే సంభావ్యత $P(X=x)=\frac{e^{-x}}{x!}$

$$= \frac{e^{-1.5}\,(1.5)^x}{x!}\ ,\ x = 0,1,2,........$$

ముగ్గురు కంటే ఎక్కువ రోగులు, ప్రత్యేక సదుపాయాలలో కోరే సంభావ్యత $= P(>3)$

$$1 - p(x \le 3)$$

$$= 1 - \sum_{x=0}^{3} e^{1.5}\,\frac{(1.5)^x}{x!}$$

$$= 1 - e^{1.5}\,\sum_{x=0}^{3} \frac{(1.5)^x}{x!}$$

ఉదాహరణ - 5:

ఒక టెలిఫోన్ ఎక్స్ఛేంజికి ఉదయం 10, 11 గంటల మధ్య మరియు 11, 12 గంటల మధ్య వచ్చే టెలిఫోన్ పిలుపుల సంఖ్యలు, వరుసగా 6, 2 పరామితులుగా గల పాయిజాన్ చలరాశులు అయితే, అవి స్వతంత్రములైతే ఏదైనా ఒక రోజును ఎక్స్ఛేంజికి 10, 12 గంటల మధ్య వచ్చే టెలిఫోను పిలుపుల సంఖ్య 5 కన్నా ఎక్కువ అగుటకు సంభావ్యత ఎంత?

జవాబు:

పాయిజాన్ విభాజన లక్షణము ప్రకారము 10, 12 గంటల మధ్య వచ్చు పిలుపుల సంఖ్య ఒక పాయిజాన్ యాదృచ్ఛిక పరామితి గల ఒక పాయిజాన్ చలరాశి అవుతుంది.

$$i.e.,\ \lambda = 8$$

$$P(X = x) = f(x) = \frac{e^{-\lambda}\,\lambda^x}{x!} = \frac{e^{-8}\,8^x}{x!}\ ,\ x = 0,1,2,.....$$

10 గంటలకు, 12 గంటలకు మధ్యన 5 కంటే ఎక్కువ పిలుపులు వచ్చే సంభావ్యత $= P(X > 5)$

$$= 1 - P(X \le 5)$$

$$= 1 - \sum_{x=0}^{5} \frac{e^{-8}\,8^x}{x!}$$

$$= 1 - 0.1912$$

$$= 0.8088$$

ఉదాహరణ - 6:

ఒక పట్టణంలో 1000 రోజులలో X మోటారు ప్రమాదాలు సంభవించే రోజులు, దిగువ ఇచ్చినారు. ఈ దత్తాంశానికి పాయిజాన్ విభాజనాన్ని సంధానించి సైద్ధాంతిక పౌనఃపున్యాలను కనుక్కోండి.

జవాబు:

ప్రమాదాల సంఖ్య X . వాటి పౌనఃపున్యాలు

ప్రమాదాల సంఖ్య X :	0	1	2	3	4	5	6	7
రోజుల సంఖ్య f :	305	365	210	80	28	9	2	1

ప్రమాదాల సరాసరి

$$\frac{\sum fx}{\sum f} = \frac{0.305 + 1.365 + 2.210 + 3.80 + 4.28 + 5.9 + 6.2 + 7.1}{1000}$$

$$= 1.2$$

ఇది పాయిజాన్ విభాజనం యొక్క పరామితి m కి అంచనావేస్తారు.

కాబట్టి $\widehat{m} = 1.2$ సైద్ధాంతిక పౌనఃపున్యాలు

$$1000 \times \frac{e^{-1.2}\,(1.2)^x}{x!} \text{లో } x = 0,1,2,........,7$$

విలువలను ప్రతిక్షేపిస్తే వస్తాయి. అవి వరుసగా సుమారు 301.2, 361.4, 216.8, 86.7, 26.0, 1.2, 0.2 అవుతాయి.

ఉదాహరణ - 7:

X పాయిజాన్ చలరాశి అవుతూ $P(X = 2) = 9\,P(X = 4) + 90P(X = 6)$ అయితే λ విలువ, X మధ్యమము కనుగొనుము.

జవాబు:

λ పరామితిగా, X పాయిజాన్ చలరాశి అయితే

$$P(X = x) = \frac{e^{-\lambda}\,\lambda^x}{x!},\ x = 0,1,2,..........\lambda > 0$$

ఇక్కడ $P(X = 2) = 9P(X = 4) + 90P(X = 6)$ నుండి

$$\frac{e^{-\lambda}\,\lambda^2}{2!} = e^{-\lambda}\left[9\frac{\lambda^4}{4!} + 90\frac{\lambda^6}{6!}\right]$$

$$= \frac{e^{-\lambda}\lambda^2}{8}\left[3\lambda^2+\lambda^4\right]$$

$$= \lambda^4+3\lambda^2-4=0$$

సాధించిన

$$\lambda^2 = \frac{-3 \pm \sqrt{9+16}}{2} = \frac{-3\pm 5}{2}$$

$\lambda>0$, కావున $\lambda^2=1 \Rightarrow \lambda=1$

కావున అంకమధ్యమము $=\lambda=1$ మరియు $\mu =$ విస్తృతి $=\lambda=1$

ఉదాహరణ - 8:

ఈ క్రింది పట్టికలో ఒక పుస్తకములోని తప్పులు పేజీలు ఇవ్వబడినవి. దీనికి పాయిజాన్ విభాజనమును నిర్మింపుము.

తప్పుల సంఖ్య	-	0	1	2	3	4
పేజీల సంఖ్య	-	211	90	19	5	0

జవాబు:

$Xi =$ తప్పుల సంఖ్య

$fi =$ పేజీల సంఖ్య అనుకొనుము

Xi	fi	$Xifi$
0	211	0
1	90	90
2	19	38
3	5	15
4	0	0
	$N=325$	143

మధ్యమము $= \overline{X} = \frac{\sum fiXi}{N}$

$$=\frac{143}{325}$$

$$= 0.44$$

పాయిజాన్ సంభావ్యతా విభాజనము

$$P(X)=\frac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!}\ ;\ x=0,1,2,.........$$

ఇక్కడ 'λ' పరామితి λ తెలిసిన పాయిజాన్ విభాజనము అంతయు తెలియును.

$$\lambda \text{ మధ్యమము } \overline{X}=\frac{\sum fiXi}{N}=0.44$$

$$\hat{\lambda}=0.44$$

కావున పాయిజాన్ విభాజనము సంభావ్యతా ప్రమేయము

$$P(X)=\frac{e^{-0.44}(0.44)X}{X!}\ ;\ X=0,1,2,........$$

0 తప్పు వుండే సంభావ్యత

$$P(0)=\frac{e^{-0.44}(0.44)^{0}}{0!}=e^{-0.44}=\frac{1}{e^{0.44}}=\frac{1}{1.5527}=0.644$$

ఒక తప్పు ఉండుటకు సంభావ్యత

$$P(1)\ \frac{e^{-0.44}(0.44)^{1}}{1!}=e^{-0.44}\times 0.44$$

$$=0.644\times 0.44$$

$$=0.2834$$

రెండు తప్పులు వుండుటకు సంభావ్యత

$$P(2)=\frac{e^{-0.44}(0.44)^{2}}{2!}=0.0623$$

మూడు తప్పులు వుండే సంభావ్యత

$$P(3) = \frac{e^{-0.44}\,(0.44)^3}{3!}$$

$$= 0.0091$$

నాల్గు తప్పులు వుండే సంభావ్యత

$$P(4) = \frac{e^{-0.44}\,(0.44)^4}{4!}$$

$$= 0.001$$

పౌనఃపున్యాలు ఈ క్రింది పట్టికలో ఇవ్వబడినవి.

X	-	0	1	2	3	4
$f(X) : N\,P(X)$:	-	209	92	20	3	1

14.4 అభ్యాసము:

ఎ. ఈ క్రింది వానికి సంక్షిప్తంగా జవాబులు వ్రాయండి.

1. పాయిజాన్ విభాజన గురించి వివరింపుము.
2. పాయిజాన్ విభాజన లక్షణములు తెలుపుము.
3. పాయిజాన్ విభాజన యొక్క అశంసిత విలువ మరియు విస్తృతిని వ్రాయండి.
4. పాయిజాన్ విభాజన యొక్క బాహుళకమును వ్రాయండి.
5. పాయిజాన్ విభాజన యొక్క ఘాతీకోత్పాదన ప్రమేయమును వ్రాయండి.

బి. ఈ క్రింది వానికి విపులంగా జవాబులు వ్రాయండి.

1. పాయిజాన్ విభాజనం యొక్క లక్షణాలు లేక గుణాలు గురించి వ్రాసి వాటికి ఉదాహరణ ఇవ్వండి.
2. 2 పరామితి గల X ఒక పాయిజాన్ యాదృచ్ఛిక $P(X \geq 1)$ విలువ ఎంత?
3. 20, 21 సంవత్సరాల మధ్య గల 53,889 యువకులను మిల్టరి ఉద్యోగం కోసం పరీక్ష చేస్తే అందులో 1,374 మందికి దృష్టిలో లోపం ఉన్నది. ఇదే వయస్సు గల 50 మంది యువకులను, యాధృచ్ఛికంగా తీసుకుంటే వరుసగా 0, 1, 2, 3, ... యువకులు దృష్టిలో లోపం కలిగి ఉండటానికి సంభావ్యతలను కనుగొనండి.

4. మోటారు కారులను అద్దెకు ఇచ్చే సంస్థలో రెండు మోటారులున్నాయి. ప్రతి దినము మోటారుల గిరాకీ సంఖ్య 1.5, పరామితి గల పాయిజాన్ యాదృచ్ఛిక అంటే -

   1. ఒక్క మోటారును ఉపయోగించకపోవడాన్ని,

   2. మోటారుల గిరాకీని నిరాకరించడానికి కన్నా సంభావ్యతలను కనుక్కోండి.

5. ఒక పాయిజాన్ విభాజనం యొక్క పరామితి 1. దాని సరాసరి నుంచి మధ్యమ విచలనము, క్రమ విచలనానికి $2/e$ రెట్లు ఉన్నదని చూపండి.

6. ఈ క్రింది పట్టికలో ఒక పుస్తకములోని తప్పులు, పేజీలు ఇవ్వబడినవి. దీనికి పాయిజాన్ విభాజనమును నిర్మింపుము.

తప్పుల సంఖ్య	-	0	1	2	3	4
పేజీల సంఖ్య	-	211	90	19	5	0

రచయిత

డా॥ కె. చందన్

పాఠం - 15

సాధారణ పంపిణి

NORMAL DISTRIBUTION

పాఠ్య నిర్మాణ క్రమం :

15.0. ఉద్దేశ్యాలు

15.1. పరిచయం

15.2. సాధారణ పంపిణి - అభివృద్ధి

15.3. సిద్ధాంతం నామకరణం

15.4. సాధారణ పంపిణి - అప్లికేషన్లు

15.5. సాధారణ పంపిణి నిర్వచనాలు

15.5.1. ప్రామాణిక సాధారణ పంపిణి

15.5.2. సాధారణ పంపిణి

15.5.3. సంజ్ఞామానం

15.5.4. ప్రత్యామ్నాయ పారామిటరైజేషన్

15.5.5. సంచిత పంపిణి విధులు

15.6. సాధారణ పంపిణి యొక్క లక్షణాలు

15.7. సాంఘిక శాస్త్రంలో ఉపయోగం

15.8. సాధారణ పంపిణి ఉపయోగాలు

15.8.1. ప్రజారోగ్య అధ్యయనాలలో ఉపయోగపడుతుంది

15.8.2. సాధారణ పంపిణిలు ఒకే సాధారణ ఆకృతిలో వర్గీకరించబడిన పంపిణిల కుటుంబం

15.8.3. బయోలాజికల్ ప్రతిచయనాలు సాధారణంగా పంపిణీ చేయబడతాయి

15.8.4. అనంతమైన సాధ్యం విలువను కలిగి ఉంటుంది

15.8.5. సాధారణ పంపిణీ అనునది గణాంక శాస్త్రానికి ముఖ్యమైనది

15.8.6. మానసిక పరిశోధనలో ఉపయోగపడుతుంది

15.9. సాధారణ పంపిణీ - గణన పద్ధతులు

15.9.1. సాధారణ పంపిణీ నుండి విలువలను రూపొందించడం

15.9.2. అత్యంత సరళమైన పద్ధతి

15.9.3. సులభమైన ప్రోగ్రామింగ్ విధానం

15.9.4. బాక్స్ - ముల్లర్ పద్ధతి

15.9.5. జిగ్గురాట్ అల్గోరిథం

15.10. ముగింపు

15.11. మాదిరి పరీక్షా పత్రాలు

15.12. ఆధార గ్రంథాలు

15.0. ఉద్దేశ్యాలు :

- సాధారణ పంపిణీ అనునది సగటు మరియు భేదం పరిమితమైనవని ఊహిస్తూ, సాధారణ పంపిణీ అనునది స్వతంత్ర డ్రా ల సమితి నుండి లెక్కించబడిన సగటు మరియు వ్యత్యాసాలు ఒకదానికొకటి స్వతంత్రంగా ఉండే ఏకైక పంపిణీ.
- సాంఘిక శాస్త్రాలలో సాధారణ పంపిణీ అత్యంత ముఖ్యమైన పంపిణీ.
- సాధారణ పంపిణీ భావన చాలా సార్వత్రికమైనది.
- సాంఘిక శాస్త్రాలలో సాధారణ పంపిణీకి ప్రముఖ స్థానం ఇవ్వబడినందున, అన్ని మానవ లక్షణాలు లేదా ప్రవర్తనా సంఘటనలు సాధారణంగా పంపిణీ చేయబడినవి.
- సాధారణ పంపిణీ విధానాన్ని ప్రజారోగ్య అధ్యయనాలలో ప్రకృతిలో నిరంతరం ఉపయోగించబడుతుంది.
- సాధారణ పంపిణీ ద్వారా మానవుల రక్తపోటు, సీరం కొలెస్ట్రాల్, పొడవు, బరువు, శిశువుల జనన బరువు మొదలైన వాటిని పరిశీలించుటకు ఉపయోగపడుతుంది.

15.1. పరిచయం :

డేటా యొక్క సాధారణ పంపిణి చాలా తక్కువగా ఉండే డేటా పాయింట్లను సాపేక్షంగా పోలి ఉంటుంది. అయితే ఒక చిన్న శ్రేణి విలువలు జరుగుతాయి. అయితే డేటా పరిధి యొక్క అధిక మరియు దిగువ చివరలలో తక్కువ దూర ప్రాంతాలు ఉంటాయి. డేటా సాధారణంగా పంపిణి చేసినప్పుడు, బెల్ ఆకారంలో మరియు సుష్టతో కూడిన ఒక చిత్రంలో ఒక గ్రాఫ్‌లో వారిని ఇది వృత్తం చేస్తుంది. డేటా యొక్క అటువంటి పంపిణిలో, సగటు, మధ్యగత మరియు బహుళకం అన్ని ఒకే విలువ మరియు వక్రరేఖ యొక్క కొనతో సమానంగా ఉంటాయి. సాధారణ పంపిణి తరచుగా దాని ఆకారం కారణంగా బెల్ రేఖ అంటారు. అయినప్పటికి, సాంఘిక శాస్త్రంలో, సాధారణ వాస్తవికత కంటే ఒక సాధారణ పంపిణి సిద్ధాంత పరమైన ఆదర్శంగా ఉంటుంది. ఒక లెన్స్‌గా భావన మరియు దరఖాస్తు ద్వారా డేటాను పరిశీలించడం ద్వారా డేటా సమితిలో ఉన్న నిబంధనలు మరియు ధోరణులను గుర్తించడం మరియు దృశ్యమానత చేయడం కోసం ఒక ఉపయోగకరమైన సాధనం.

గణాంకాలలో, ఒక సాధారణ పంపిణి (గాస్సియన్, గాస్ లేదా లాప్లేస్-గాస్ పంపిణి అని కూడా అంటారు) అనేది నిజమైన విలువ గల యాదృచ్ఛిక వేరియబుల్ కోసం నిరంతర సంభావ్యత పంపిణి రకం. దాని సంభావ్యత సాంద్రత ఫలం యొక్క సాధారణ రూపం.

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

పరిమితి 'μ' అనునది పంపిణి యొక్క సగటు లేదా అంచనా, అయితే పరామితి 'σ' దాని ప్రామాణిక విచలనం. పంపిణి యొక్క వైవిధ్యం σ^2. గాస్సియన్ పంపిణితో కూడిన యాదృచ్ఛిక వేరియబుల్ సాధారణంగా పంపిణి చేయబడుతుందని చెప్పబడినది. దీనినే సాధారణ విచలనం అని కూడా అంటారు.

సాధారణ పంపిణిలు గణాంకాలలో ముఖ్యమైనవి మరియు పంపిణిలు తెలియని వాస్తవ విలువ గల యాదృచ్ఛిక ప్రతిచయనాలను సూచించడానికి సహజ మరియు సామాజిక శాస్త్రాలలో తరచుగా ఉపయోగించబడతాయి. ఇది కొన్ని పరిస్థితులలో, పరిమిత సగటు మరియు వ్యత్యాసాలతో కూడిన యాదృచ్ఛిక ప్రతిచయనం యొక్క అనేక నమూనాల యాదృచ్ఛిక ప్రతిచయనం పేర్కొన్నది. నమూనాల సంఖ్య పెరిగే కొద్దీ దీని పంపిణి సాధారణ పంపిణిలో కలుస్తుంది. అందువలన కొలత లోపాలు లాంటి అనేక స్వతంత్ర ప్రక్రియల మొత్తంగా భావించేబడే భౌతిక పరిమాణాలు, తరచుగా పంపిణిలు దాదాపు సాధారణమైనది.

15.2. సాధారణ పంపిణి - అభివృద్ధి :

1738 వ సంవత్సరంలో "ది డాక్ట్రిన్ ఆఫ్ ఛాన్సెస్" యొక్క రెండవ ఎడిషన్‌లో బైనామియల్‌లోని గుణకాల

అధ్యయనాన్ని ప్రచురించిన డిమోయివ్రేకి సాధారణ పంపిణిని కనుగొన్నందుకు క్రెడిట్‌ను పొందాడు. $(a+b)^n$ యొక్క విస్తరణ. ఈ విస్తరణలో మధ్య పదం సుమారుగా పరిమాణాన్ని కలిగి ఉన్నదని డిమోయివ్రే నిరూపించాడు. $2^n / 2\sqrt{\pi}^n$ మరియు అది ఒకవేళ 'm' లేదా '$\frac{1}{2}n$' ఒక పరిమాణం అనంతంగా గొప్పది. ఆపై నిష్పత్తి యొక్క సంవర్గమానం, మధ్య నుండి విరామం 'p' ద్వారా దూరమైన పదం, మధ్య కాలానికి కలిగి ఉంటుంది. $\frac{-2ll}{n}$. ఈ సిద్ధాంతాన్ని సాధారణ సంభావ్యత చట్టం కోసం మొదటి అస్పష్టమైన వ్యక్తీకరణగా అర్థం చేసుకోగలిగినప్పటికీ, స్టిగ్లర్ తన ఫలితాలను ద్విపద గుణకాల యొక్క ఉజ్జాయింపు నియమం కంటే ఎక్కువగా ఏమీ వివరించలేదని డిమోయివ్రే పేర్కొన్నాడు.

సాధారణ పంపిణి చట్టాన్ని సూచించిన మొదటి వ్యక్తి గాస్, అయినప్పటికి, లాప్లేస్ గణనీయమైన సహకారాన్ని అందించాడు. 1774వ సంవత్సరంలో లాప్లేస్ అనేక పరిశీలనలను సముదాయించే సమస్యను మొదటిసారిగా ఎదుర్కొన్నాడు. అయితే అతని స్వంత పరిష్కారం లాప్లాసియన్ పంపిణికి దారితీసింది.

1809వ సంవత్సరంలో ఐరిష్ అమెరికన్ గణిత శాస్త్రజ్ఞుడు రాబర్ట్ అడ్రైన్, గాస్ నుండి ఏకకాలంలో మరియు స్వతంత్రంగా సాధారణ సంభావ్యత చట్టం యొక్క రెండు తెలివైన కానీ లోపభూయిష్టమైన సిద్ధాంతాలను ప్రచురించాడు. 1871వ సంవత్సరంలో 'అబ్బే' ద్వారా వెలికితీసే వరకు అతని రచనలు శాస్త్రీయ సమాజంచే పెద్దగా గుర్తించబడలేదు. 19వ శతాబ్దం మధ్యలో 'మాక్స్‌వెల్' సాధారణ పంపిణి అనునది అనుకూలమైన గణిత సాధనం మాత్రమే కాదు, సహజ దృగ్విషయాలలో కూడా సంభవించవచ్చు అని నిరూపించారు.

15.3. సిద్ధాంతం నామకరణం :

ప్రవేశ పెట్టినప్పటి నుండి, సాధారణ పంపిణిని అనేక రకాల పేర్లతో పిలుస్తారు. లోపం యొక్క చట్టం, లోపాలు సౌకర్యం యొక్క చట్టం, లాప్లేస్ యొక్క రెండవ నియమం, గాస్సియన్ చట్టం మొదలైనవి. గాస్ ద్వారా స్వయంగా సాధారణ సమీకరణాల సూచనతో ఈ పదాన్ని రూపొందించారు. సాధారణ పంపిణి, దాని సాంకేతిక అర్థాన్ని సాధారణం కంటే ఆర్తోగోనల్‌గా కలిగి ఉంటుంది. అయితే 19వ శతాబ్దం చివరి నాటికి కొంతమంది రచయితలు సాధారణ పంపిణి అనే పదాన్ని విశ్లేషంగా ఉపయోగించారు. ఈ పదం ఇప్పుడు వాస్తవం యొక్క ప్రతిబింబంగా పరిగణించబడుతుంది. ఈ పంపిణి విలక్షణమైనదిగా మరియు సాధారణమైనదిగా చూపబడినది. అందువలన, సాధారణమైనవి 'పియర్స్' ప్రకారం ఈవిధంగా నిర్వచించారు. సాధారణం అనునది వాస్తవానికి ఏమి జరుగుతుందో దాని యొక్క సగటు కాదు, కానీ దీర్ఘకాలంలో, దాని క్రింద ఏమి జరుగుతుంది కొన్ని పరిస్థితులు. 20వ శతాబ్దం ప్రారంభంలో పియర్సన్ ఈ పంపిణీకి ఒక హోదాగా "సాధారణ" పదాన్ని ప్రాచుర్యంలోనికి తెచ్చాడు.

15.4. సాధారణ పంపిణి-అప్లికేషన్లు :

సాధారణ పంపిణిని మొదట కొలత లోపాల వర్ణనకు వర్తింప చేసినప్పటికి, శాస్త్రవేత్తలు తరువాత అది మానవ దృగ్విషయాలలో కొలత లోపాలతో సంబంధం లేకుండా వైవిధ్యాన్ని వివరించినట్లు గ్రహించడం ప్రారంభించారు. 1835వ సంవత్సరంలో అడాల్ఫ్ క్వెట్లెట్ ఎత్తు లాంటి భౌతిక లక్షణాలకు సాధారణ పంపిణిని వర్తింపజేశారు మరియు 1869వ సంవత్సరంలో ఫ్రాన్సిస్ గాల్టన్ సామర్థ్యంలో వ్యక్తిగత వ్యత్యాసాలను నియంత్రణ చేయడానికి అదే పంపిణిని విస్తరించాడు. పరీక్ష స్కోర్‌లు వాస్తవానికి సాధారణ పంపిణి ప్రకారం నిర్వచించబడే సైకోమెట్రిక్ సాధనాలలో అప్లికేషన్స్ కనిపిస్తాయి.

ఉదాహరణకు, చాలా గూఢచార పరీక్షలలో ఐక్యూ స్కోర్స్ ఒక వ్యక్తి పరంగా కేటాయించబడతాయి. పంపిణిలో స్థానం, ఐక్యూ సగటు 100 మరియు 15 యొక్క ప్రామాణిక విచలనాన్ని కలిగి ఉంటుంది అనే ఊహ ప్రకారం, 130 స్కోర్ వ్యక్తిని మేధో సామర్థ్యంలో ఎగువ 2 శాతం జనాభాలో ఉంచుతుంది.

నిజానికి, సాధారణ పంపిణి భావన చాలా సార్వత్రికమైనది. ప్రస్తుతం ఇది అన్ని పారామెట్రిక్ స్టాటిస్టికల్ పద్ధతులకు ఆధారాన్ని అందిస్తుంది.

ఉదాహరణకు బహుళ సహ సంబంధం విశ్లేషణ మరియు వైవిధ్యం యొక్క విశ్లేషణ రెండూ ప్రిడిక్షన్స్ యొక్క లోపాలు లేదా అవశేషాలు సాధారణంగా సున్నా సగటు మరియు ఏకరీతి వ్యత్యాసంతో పంపిణి చేయబడతాయని ఊహిస్తాయి. ద్విపద సాధారణీకరణ యొక్క ప్రత్యేక సందర్భంలో, ఉమ్మడి పంపిణి గంట ఆకారాన్ని సుమారుగా అంచనా వేస్తుందని ఈ ఊహ సూచిస్తుంది.

సాంఘిక శాస్త్రాలలో సాధారణ పంపిణికి ప్రముఖ ప్రవర్తనా సంఘటనలు సాధారణంగా పంపిణి చేయబడునని గుర్తించడం చాలా అవసరం. ఉదాహరణకు, అనేక దృగ్విషయాలు పొడవాటి ఎగువ తోకలతో చాలా వక్ర పంపిణిలను ప్రదర్శిస్తాయి. గృహాలలో వార్షిక ఆదాయ పంపిణి, చలన చిత్రాలు బాక్స్ ఆఫీస్ పనితీరు, శాస్త్రవేత్తల పత్రిక కథనాలు మొదలగునవి. కొన్నిసార్లు సాధారణ స్థితి నుండి ఈ నిష్క్రమణలు తగిన డేటా పరివర్తనను ఉపయోగించి సరిచేయబడతాయి.

15.5. సాధారణ పంపిణి నిర్వచనాలు :

సాధారణ పంపిణి యొక్క ముఖ్యమైన నిర్వచనాలను ఈక్రిది విధంగా వివరించవచ్చును. అవిః

15.5.1. ప్రామాణిక సాధారణ పంపిణి :

సాధారణ పంపిణి యొక్క సరళమైన సందర్భాన్ని ప్రామాణిక సాధారణ పంపిణి లేదా యూనిట్ సాధారణ పంపిణి అంటారు. ఇది ఒక ప్రత్యేక సందర్భం. $\mu = 0$ మరియు $\sigma = 1$, మరియు ఇది ఈ సంభావ్యత సాంద్రత ఫలం ద్వారా వివరించబడినది.

$$\phi(z) = \frac{e - z^2 / 2}{\sqrt{2\pi}}$$

వేరియబుల్ 'Z' సగటు '0' మరియు వైవిధ్యం మరియు ప్రామాణిక విచలనం 1. సాంద్రత $\phi(z)$ దాని శిఖరాన్ని కలిగి ఉంటుంది. $1/\sqrt{2\pi}$ వద్ద Z=0 మరియు ఇన్‌ఫ్లెక్షన్ బిందువుల వద్ద Z = +1 మరియు Z = 1.

పైన ఉన్న సాంద్రత సాధారణంగా ప్రామాణిక సాధారణం అని పిలువబడుతున్నప్పటికీ, కొంతమంది రచయితలు సాధారణ పంపిణి యొక్క ఇతర సంస్కరణలను వివరించడానికి ఆ పదాన్ని ఉపయోగించారు.

15.5.2. సాధారణ పంపిణి :

ప్రతి సాధారణ పంపిణి ప్రామాణిక సాధారణ పంపిణి యొక్క సంస్కరణ, దీని డొమైన్ కారకం ద్వారా విస్తరించబడినది σ (ప్రామాణిక విచలనం) ఆపై అనువదించబడినది. μ (సగటు విలువ).

$$f(x/\mu,\sigma^2)=\frac{1}{\sigma}\phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$$

సంభావ్యత సాంద్రత తప్పనిసరిగా స్కేల్ చేయబడాలి. $1/\sigma$ తద్వారా సమగ్రం ఇప్పటికి 1.

అనగా 'Z' ఒక ప్రామాణిక సాధారణ విచలనం. అప్పుడు $X=\sigma^2+\mu$ ఆశించిన విలువతో సాధారణ పంపిణిని కలిగి ఉంటుంది. μ మరియు ప్రామాణిక విచలనం σ ద్వారా మార్చబడినది. μ అనే విభిన్న సాధారణ పంపిణిని అందించడానికి X. దీనికి విరుద్ధంగా, అనగా X అనునది పారామితులతో సాధారణ విచలనం μ మరియు σ^2. అప్పుడు ఇది X పంపిణిని ఫార్ములా ద్వారా రీస్కేల్ చేయవచ్చును.

15.5.3. సంజ్ఞామానం :

ప్రామాణిక గాస్సియన్ పంపిణి యొక్క సంభావ్యత సాంద్రత (ప్రామాణిక సాధారణ పంపిణి, సున్నా సగటు మరియు యూనిట్ వ్యత్యాసంలో) తరచుగా గ్రీకు అక్షరంతో సూచించబడుతుంది. ϕ (ఫై) అను గ్రీక్ అక్షరం 'ఫి' యొక్క ప్రత్యామ్నాయ రూపం. φ కూడా చాలా తరచుగా ఉపయోగిస్తారు.

సాధారణ పంపిణిని తరచుగా సూచిస్తారు $N(\mu,\sigma^2)$ లేదా $N(\mu,\sigma^2)$. అందువలన యాదృచ్ఛిక ప్రతిచయనం ఉన్నప్పుడు 'X' సాధారణంగా సగటుతో పంపిణి చేయబడుతుంది. 'μ' మరియు ప్రామాణిక విచలనం 'σ'.

$$X \sim N(\mu,\sigma^2)$$

15.5.4. ప్రత్యామ్నాయ పారామిటరైజేషన్ :

గణాంక శాస్త్రంలోని రచయితలు ఖచ్చితత్వాన్ని ఉపయోగించాలని సూచించారు. 'T' విచలనానికి బదులుగా పంపిణి యొక్క వెడల్పును నిర్వచించే పరామితి వలె 'σ' లేదా వైవిధ్యం 'σ^2' ఖచితత్వం సాధారణంగా వైవిధ్యం యొక్క పరస్పరంగా నిర్వచించబడుతుంది. $\frac{1}{\sqrt{\sigma^2}}$, అప్పుడు సూత్రం అవుతుంది.

$$f(x)=\sqrt{\frac{T}{2\pi}}e^{-r(x-\mu)^2/2}$$

ఈ ఎంపిక సంఖ్య గణనలలో ప్రయోజనాలను కలిగి ఉంటుంది. మల్టీవియారిట్ సాధారణ పంపిణిలో వేరియబుల్స్ యొక్క బయేసియన్ అనుమతి లాంటి కొన్ని సందర్భాలలో సూత్రాలను సులభతరం చేస్తుంది.

ప్రత్యామ్నాయంగా, ప్రామాణిక విచలనం యొక్క పరస్పరం $T^1=1/\sigma$ ఖచ్చితత్వంగా నిర్వచించబడవచ్చును. ఈ సందర్భంలో సాధారణ పంపిణి యొక్క వ్యక్తీకరణ అవుతుంది.

$$f(x)=\frac{T^1}{\sqrt{2\pi}}e^{-(r^1)^2(x-\mu^2)/2}$$

స్టిగ్లర్ ప్రకారం, ఈ సూత్రీకరణ చాలా సరళమైన మరియు సులభంగా గుర్తించుకోగల సూత్రం మరియు పంపిణి యొక్క పరిమాణాల కోసం సరళమైన ఉజ్జాయింపు సూత్రాల కారణంగా ప్రయోజనకరంగా ఉంటుంది.

15.5.5. సంచిత పంపిణి విధులు :

ప్రామాణిక సాధారణ పంపిణి యొక్క సంచిత పంపిణి ఫలం (CDF), సాధారణంగా పెద్ద గ్రీకు అక్షరంతో సూచించబడుతుంది ϕ (ఫై) సమగ్రమైనది.

$$\phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\alpha}^{x}e^{-t^2/2}dt$$

సంబంధిత లోపం ఫలం $erf(x)$ యాదృచ్ఛిక ప్రతిచయనం యొక్క సంభావ్యతను ఇస్తుంది. సగటు '0' యొక్క సాధారణ పంపిణి మరియు వైవిధ్య ½ పరిధిలో పడిపోతుంది $[-x,x]$. అనగా :

$$erf(x)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{0}^{x}e^{-t^2}dt$$

ఈ సమగ్రతలు ప్రాథమిక విధుల పరంగా వ్యక్తీకరించబడవు మరియు తరచుగా ప్రత్యేక విధులు అని చెప్పబడతాయి. అయినప్పటికి, అనేక సంఖ్యాపరమైన ఉజ్జాయింపులు ఈక్రింది విధంగా వివరించబడినాయి.

$$\phi(x)=\frac{1}{2}\left[1+erf\left(\frac{x}{\sqrt{2)}}\right)\right]$$

సాంద్రతతో సాధారణ పంపిణి కోసం f, అర్థం 'μ' మరియు విచలనం 'σ', సంచిత పంపిణి ఫలం.

$$F(x)=\phi\left(\frac{x-\mu}{0}\right)=\frac{1}{2}\left[1+erf\left(\frac{x-\mu}{\sigma\sqrt{2)}}\right)\right]$$

ప్రామాణిక సాధారణ ఫలం (CDF) యొక్క పూరక, $Q(x)=1-\phi x$, తరచుగా Q-ఫలం అని పిలుస్తారు.

15.6. సాధారణ పంపిణి యొక్క లక్షణాలు :

సాధారణ పంపిణిలో అత్యంత గుర్తించదగిన లక్షణం ఒకటి దాని ఆకారం మరియు పరిపూర్ణ సౌష్టవం. మీరు సరిగ్గా మధ్యలో ఉన్న పంపిణి చిత్రాన్ని చిత్రీకరించినట్లయితే, మీకు రెండు సమాన విభజనలు ఉన్నాయి. ప్రతిదానికి ప్రతి ఒక్క ప్రతిబింబం. ఇది కూడా పంపిణి మధ్యలో ప్రతివైపు డేటా పతనం పరిశీలనతో ఒక సగం అర్ధం.

సాధారణంగా పంపిణి యొక్క మధ్య భాగం గరిష్ట పౌనఃపున్యాన్ని కలిగి ఉన్న పాయింట్. అనగా, ఇది వేరియబుల్ యొక్క అత్యంత పరిశీలనలో సంఖ్య లేదా ప్రంతిస్పందన వర్గం.

సాధారణ పంపిణి యొక్క మధ్య భాగం కూడా మూడు చర్యలు వస్తాయి. అవి: సగటు, మధ్యగతం మరియు బాహుళకం. సంపూర్ణ సాధారణ పంపిణిలో, ఈ మూడు కొలతలు ఒకే సంఖ్య.

అన్ని సాధారణ లేదా దాదాపుగా సాధారణ పంపిణిలలో ప్రామాణిక విచలనం, విభాగాలలో లెక్కించినప్పుడు సగటు మరియు ఏదైనా దూరానికి మధ్య ఉన్న వక్రరేఖా పరిధిలో స్థిరమైన నిష్పత్తి ఉంటుంది.

ఉదాహరణకు, అన్ని సాధారణ వక్రరేఖలలో, అన్ని కేసులలో **99.73** శాతం సగటు నుండి మూడు ప్రామాణిక వ్యత్యాసాలకు లోబడి ఉంటుంది. **95.45** శాతం అన్ని కేసులలో సగటు రెండు ప్రామాణిక వ్యత్యాసాలలో పడతాయి మరియు **68.27** శాతం కేసుల నుండి ఒక ప్రామాణిక విచలనం సగటు. సాధారణ పంపిణిలు తరచూ ప్రామాణిక స్కోర్లు లేదా 'Z' స్కోర్లలో ప్రాతినిధ్యం వహిస్తాయి. 'Z' స్కోర్లు ఒక నిజమైన స్కోరు మరియు ప్రామాణిక వ్యత్యాసాల పరంగా మధ్య దూరాన్ని తెలియజేసే సంఖ్య. ప్రామాణిక సాధారణ పంపిణి. '0.0' యొక్క సగటు మరియు '1.0' యొక్క ప్రామాణిక విచలనం కలిగి ఉన్నది.

15.7. సాంఘిక శాస్త్రంలో ఉపయోగం :

సాధారణ పంపిణి సైద్ధాంతికంగా ఉన్నప్పటికి, అనేక సాధారణ వేరియబుల్స్ పరిశోధకులు అధ్యయనం ఒక సాధారణ వక్రతకు దగ్గరగా ఉంటుందని అధ్యయనం చేశారు.

ఉదాహరణకు, SAT, ACT మరియు GRE లాంటి ప్రామాణిక పరీక్ష స్కోర్లు సాధారణంగా ఒక సాధారణ పంపిణిని పోలి ఉంటాయి. ఎత్తు, అథ్లెటిక్ సామర్థ్యం మరియు ఇచ్చిన జనాభా యొక్క అనేక సాంఘిక మరియు రాజకీయ వైఖరులు కూడా సాధారణంగా బెల్ బెల్లును ప్రతిబింబిస్తాయి.

సాధారణ పంపిణి యొక్క ఆదర్శ డేటా సాధారణంగా పంపిణి చేయబడినప్పుడు పోలికగా ఉపయోగపడుతుంది. ఉదాహరణకు, చాలా మంది ప్రజలు అమెరికాలో గృహ ఆదాయం పంపిణిని ఒక సాధారణ పంపిణిగా మరియు ఒక గ్రాఫ్లో పన్నాగం చేసే సమయంలో బెల్ రేఖ ప్రతిబింబిస్తుందని భావించారు.

ఇది చాలామంది ప్రజల ఆదాయం మధ్యలో సంపాదించవచ్చని లేదా ఇతర మాటలలో ఆరోగ్యకరమైన మధ్య తరగతి ఉన్నది. ఇంతలో, తక్కువ తరగతులలో ఉన్న వారి సంఖ్య చిన్నదిగా ఉంటుంది. అయితే, అమెరికాలో గృహ ఆదాయం వాస్తవ పంపిణి ఒక బెల్ రేఖ తక్కువగా ఉంటాయి. అనగా మనం పేదవాళ్ళు మరియు సౌకర్యవంతంగా మధ్య తరగతిలో ఉన్న వారిని కలిగి ఉన్న వారి కంటే మనుగడ కోసం పోరాడుతున్నామని అర్థం. ఈ సందర్భంలో, సాధారణ పంపిణి యొక్క ఆదర్శిత ఆదాయం అసమానత చిత్రీకరించడానికి ఉపయోగపడుతుంది.

15.8. సాధారణ పంపిణి ఉపయోగాలు :

సాధారణ పంపిణి యొక్క ముఖ్యమైన ఉపయోగాలను ఈక్రింది విధంగా వివరించవచ్చును. అవి :

15.8.1. ప్రజారోగ్య అధ్యయనాలలో ఉపయోగపడుతుంది :

ప్రజారోగ్య అధ్యయనాలలో, ప్రకృతిలో నిరంతర స్థాయిలలో కొలవగల ప్రతిచయనాల కోసం సమాచారం తరచుగా సేకరించబడుతుంది. అలాంటి ప్రతిచయనాల యొక్క ఉదాహరణలు వయస్సు, బరువు మరియు రక్తపోటు. ఈ ప్రతిచయనాలతో అనుబంధించబడిన పంపిణి ఆకృతి వివిధ పరిధులలోని విలువల ఫ్రీక్వెన్సీని వివరించడానికి ఉపయోగపడుతుంది. అదేవిధంగా సాధ్యమైన విలువల సగటు మరియు పరిధి యొక్క అంచనాలను అందిస్తాయి. సాధారణ పంపిణి అనునది నిరంతర ప్రతిచయనాలను వివరించడానికి విస్తృతంగా ఉపయోగించే పంపిణి. దీనిని ప్రసిద్ధ జర్మన్ గణిత శాస్త్రజ్ఞుడు కార్ల ఫ్రెడిక్ గాస్ తరువాత దీనిని తరచుగా గాస్సియన్ పంపిణి అని కూడా పిలుస్తారు.

15.8.2. సాధారణ పంపిణీలు ఒకే సాధారణ ఆకృతిలో వర్గీకరించబడిన పంపిణీల కుటుంబం :

సాధారణ పంపిణీలు ఒకే సాధారణ ఆకృతిలో వర్గీకరించబడిన పంపిణీల కుటుంబంగా ఉంటుంది. ఈ పంపిణీలు స్పష్టంగా ఉంటాయి. ప్రతిచయనం యొక్క కొలిచిన విలువలు తోకలలో కంటే మధ్యలో ఎక్కువ కేంద్రీకృతమై ఉంటాయి. వాటిని తరచుగా బెల్ ఆకారం అని అంటారు. సాధారణ పంపిణి యొక్క వక్రరేఖ క్రింద ఉన్న ప్రాంతం ప్రతిచయనం కోసం సాధ్యమయ్యే ప్రతి విలువను పొందే సంభావ్యత మొత్తాన్ని సూచిస్తుంది. మరో మాటలో చెప్పాలంటే, సాధారణ వక్రరేఖ క్రింద ఉన్న మొత్తం వైశాల్యం ఒకదానికి సమానం. సాధారణ పంపిణి ఆకారం కేవలం రెండు పారామితుల పరంగా గణితశాస్త్రంలో పేర్కొనబడినది. సగటు (μ) మరియు ప్రామాణిక విచలనం (σ) సిగ్మా. ప్రామాణిక విచలనం సగటు చుట్టూ చెదరగొట్టే మొత్తాన్ని నిర్ధేశిస్తుంది. అయితే సగటు అనునది ప్రతిచయనం యొక్క నమూనా విలువలలో సగటు విలువ. ఒక ప్రతిచయనం కోసం సాధ్యమయ్యే విలువలో 95 శాతం, -2 ప్రామాణిక విచలనాలు లోపల ఉండటం సాధారణ పంపిణి యొక్క ప్రధాన లక్షణం.

15.8.3. బయోలాజికల్ ప్రతిచయనాలు సాధారణంగా పంపిణీ చేయబడతాయి :

అనేక బయోలాజికల్ ప్రతిచయనాలు సాధారణంగా పంపిణీ చేయబడతాయి. ఉదాహరణకు, రక్తపోటు, సీరం కొలెస్ట్రాల్, ఎత్తు మరియు బరువు. ఈ ప్రతిచయనాలతో అనుబంధించబడిన సంభావ్యతలను అంచనా వేయడానికి

సాధారణ వక్రరేఖను ఉపయోగించవచ్చును. ఉదాహరణకు, శిశువుల జనన బరువు సాధారణంగా 7.2 పౌండ్ల సగటు మరియు 2.1 పౌండ్ల ప్రామాణిక విచలనంతో పంపిణీ చేయబడిన జనాభాలో, యాధృచ్ఛికంగా ఎంపిక చేయబడిన శిశువు '3' కంటే తక్కువ జనన బరువును కలిగి ఉండే సంభావ్యతను కనుగొనవచ్చును.

15.8.4. అనంతమైన సాధ్యం విలువను కలిగి ఉంటుంది :

సాధారణ పంపిణీ దాని సగటు మరియు ప్రామాణిక విచలనం కోసం అనంతమైన సాధ్యం విలువలను కలిగి ఉంటుంది. కాబట్టి, ప్రతి వక్రరేఖకు ప్రాంతాన్ని లెక్కించడం అసాధ్యం. బదులుగా సగటు 'సున్నా' మరియు ప్రామాణిక విచలనం 'ఒకటి' అయిన ఒకే వక్రరేఖకు సంభావ్యతలు లెక్కించబడతాయి. ఈ వక్రరేఖను ప్రామాణిక సాధారణ పంపిణీ (Z) గా సూచిస్తారు. సాధారణంగా సగటు (μ) మరియు ప్రామాణిక విచలనం సిగ్మా (σ) తో పంపిణీ చేయబడిన యాదృచ్ఛిక ప్రతిచయనం $(X)Z = (X = \mu)/\sigma$ సూత్రం ద్వారా ప్రామాణిక సాధారణ పంపిణీకి సులభంగా రూపాంతరం చెందుతుంది.

15.8.5. సాధారణ పంపిణీ అనునది గణాంక శాస్త్రానికి ముఖ్యమైనది :

సాధారణ పంపిణీ అనునది గణాంక పనికి ముఖ్యమైనది. ఎందుకంటే ఉపయోగించే చాలా పరికల్పన పరీక్షలు పరిగణించబడుతున్న యాదృచ్ఛిక ప్రతిచయనం అంతర్లీన సాధారణ పంపిణీని కలిగి ఉన్నట్లు భావిస్తాయి. అదృష్టవశాత్తు, ప్రతిచయనం పంపిణీ దాదాపు సాధారణమైనప్పటికి ఈ పరీక్షలు బాగా పనిచేస్తాయి. అలాంటి పరీక్షలకు ఉదాహరణలు t, F లేదా చి-స్క్వేర్ గణాంకాల ఆధారంగా ఉంటాయి. ప్రతిచయనం సాధారణం కానట్లయితే, ప్రత్యామ్నాయ నాన్ పారామెట్రిక్ పరీక్షలను పరిగణించాలి. అయినప్పటికి, అలాంటి పరీక్షలు అసౌకర్యంగా ఉంటాయి. ఎందుకంటే అవి సాధారణంగా తక్కువ శక్తివంతంగా ఉంటాయి. గణిత సిద్ధాంతం సాధారణ పంపిణీని నిరూపించింది. తగినంత పెద్ద సంఖ్యలో నమూనాలను తీసుకుంటే ఆధారిత పరికల్పన పరీక్షను నిర్వహించవచ్చును. ఈ తరువాత ఎంపిక ఒక ముఖ్యమైన సూత్రం పై ఆధారపడి ఉంటుంది. ఇది సాధారణ పనితీరు ఆధారంగా పరీక్షల ప్రజాదరణకు ఎక్కువగా భాద్యత వహిస్తుంది. నమూనాల పరిమాణం తగినంత పెద్దదిగా ఉంటే, నమూనా పంపిణీ యొక్క ఆకృతి సాధారణ ఆకృతికి చేరుకుంటుంది.

15.8.6. మానసిక పరిశోధనలో ఉపయోగపడుతుంది :

మానసిక పరిశోధనలో ప్రవర్తన యొక్క కొలత ఉంటుంది. ఈ కొలమానం వ్యక్తిగతంగా ఒకదానికొకటి భిన్నంగా ఉండే సంఖ్యలకు దారితీస్తుంది. కానీ సమూహంగా ఊహించదగినది. సంఖ్యల యొక్క సాధారణ నమూనాలలో ఒకటి, చాలా కొలతలు పంపిణీ యొక్క సగటు దగ్గర ఒకదానితో ఒకటి సమూహంగా ఉంటాయి. ఇవి సగటు నుండి దూరంగా ఉన్నందున తక్కువ సందర్భాలు సంభవిస్తాయి.

15.9. సాధారణ పంపిణి - గణన పద్ధతులు :

సాధారణ పంపిణి యొక్క గణన పద్ధతులను ఈ క్రింది విధంగా వివరించవచ్చును. అవి:

15.9.1. సాధారణ పంపిణి నుండి విలువలను రూపొందించడం :

కంప్యూటర్ అనుకరణలలో ప్రత్యేకించి మోంటో-కార్లో పద్దతి యొక్క అనువర్తనాలలో, సాధారణంగా పంపిణి చేయబడిన విలువలను రూపొందించడం తరచుగా ఉపయోగిస్తున్నారు.

ఒక $N(\mu,\sigma^2)$ ని $X=\mu+\sigma^2$ వలె రూపొందించవచ్చును. ఇక్కడ 'Z' ప్రామాణికత సాధారణమైనందున, దిగువ జాబితా చేయబడిన అన్ని అల్గారిథమ్‌లు ప్రామాణిక సాధరణ విచనాలను ఉత్పత్తి చేస్తాయి. ఈ విధంగా అన్ని అల్గారిథమ్‌లు ఏకరీతి యాదృచ్ఛిక వైవిధ్యాలను ఉత్పత్తి చేయగల యాదృచ్ఛిక సంఖ్య జనరేటర్ 'U' లభ్యతపై ఆధారపడి ఉంటాయి.

15.9.2. అత్యంత సరళమైన పద్ధతి :

అత్యంత సరళమైన పద్ధతి సంభావ్యత సమగ్ర పరివర్తన ఆస్తిపై ఆధారపడి ఉంటుంది. U(0, 1) పై ఏకరీతిగా పంపిణి చేయబడితే, అప్పుడు $\phi^{-1}(U)$ ప్రామాణక సాధారణ పంపిణిని కలిగి ఉంటుంది. ఈ పద్ధతి యొక్క ప్రతికూలత ఏమిటంటే ఇది ప్రోబిట్ ఫలం ϕ^{-1} గణనపై ఆధారపడి ఉంటుంది.

15.9.3. సులభమైన ప్రోగ్రామింగ్ విధానం :

సెంట్రల్ లిమిట్ థియరమ్‌పై ఆధారపడే సులభమైన ప్రోగ్రామ్ ఉజ్జాయింపు విధానం ఈ క్రింది విధంగా ఉంటుంది.

12 ఏకరీతి U(0, 1) విచలనాలను రూపొందించబడి, వాటినన్నింటిని జోడించి మరియు '6' ని తీసివేయండి, ఫలితంగా లభించే యాధృచ్ఛిక ప్రతిచయనం సుమారుగా ప్రామాణిక సాధారణ పంపిణిని కలిగి ఉంటుంది.

15.9.4. బాక్స్-ముల్లర్ పద్ధతి :

బాక్స్-ముల్లర్ పద్ధతి 'U' మరియు 'Y' అనే రెండు స్వతంత్ర యాదృచ్ఛిక సంఖ్యలను ఉపయోగిస్తుంది (0, 1). అప్పుడు రెండు యాదృచ్ఛిక ప్రతిచయనాలు 'X' మరియు 'Y'.

$$X=\sqrt{-2inU}\,Cos(2\pi V)$$

$$Y=\sqrt{-2inU}\,Sin(2\pi V)$$

రెండూ ప్రామాణిక సాధారణ పంపిణిని కలిగి ఉంటాయి మరియు స్వతంత్రంగా ఉంటాయి. ద్విపద సాధారణ యాదృచ్ఛిక వెక్టర్ (X, Y) కోసం స్క్వేర్ నార్మ్ X^2+Y^2 రెండు డిగ్రీల స్వేచ్ఛతో చి-స్వేర్డ్ పంపిణిని కలిగి ఉంటుంది.

ఇది పరిమాణానికి అనుగుణంగా ఉత్పత్తి చేయబడిన ఎక్స్‌పోనెన్షియల్ యాదృచ్ఛిక ప్రతిచయనం (U). ఈ సమీకరణాలలో మరియు కోణం వృత్తం చుట్టూ ఏకరీతిగా పంపిణీ చేయబడుతుంది. యాదృచ్ఛిక ప్రతిచయనం 'V' ద్వారా ఎంపిక చేయబడుతుంది.

15.9.5. జిగ్గురాట్ అల్గోరిథం :

బాక్స్-ముల్లర్ రూపాంతరం కంటే వేగంగా ఉంటుంది మరియు ఖచ్చితమైనది. దాదాపు 97 శాతం అన్ని సందర్భాలలో ఇది రెండు యాదృచ్ఛిక సంఖ్యలను మాత్రమే ఉపయోగిస్తుంది. ఒక యాదృచ్ఛిక పూర్ణాంకం మరియు ఒక యాదృచ్ఛిక ఏకరీతి, ఒక గుణకారం మరియు ఒక పరీక్షించినచో, కేవలం 3 శాతం కేసులలో ఆ రెండింటి కలయిక జిగ్గురాట్ కోర్ వెలుపలికి వచ్చినప్పుడు ఘాతాంకాలను మరియు ఏకరీతి యాదృచ్ఛిక సంఖ్యలను ఉపయోగించాల్సి ఉంటుంది.

15.10. ముగింపు :

సాధారణ పంపిణీని గాస్సియన్ పంపిణీ అని కూడా అంటారు. స్వతంత్ర యాదృచ్ఛికంగా ఉత్పత్తి చేయబడిన ప్రతిచయనాల కోసం అత్యంత సాధారణ పంపిణీ ఫలం, సర్వే విశ్లేషణ మరియు నాణ్యత నియంత్రణ నుండి వనరుల కేటాయింపు వరకు గణాంక నివేదికలలో దాని సుపరిచితమైన గంట ఆకారాన్ని కలిగి ఉంటుంది. ముఖ్యంగా సాధారణ పంపిణీ యొక్క గ్రాఫ్ రెండు పారామితుల ద్వారా వర్గీకరించబడుతుంది. సాధారణ పంపిణీలు గణాంకాలలో ముఖ్యమైనది మరియు పంపిణీకి తెలియని వాస్తవ విలువ గల యాదృచ్ఛిక ప్రతిచయనాలను సూచించడానికి సహజ మరియు సామాజిక శాస్త్రాలలో తరుచుగా ఉపయోగించబడతాయి. సాధారణ పంపిణీ అనునది మొదటి రెండు అనగా సగటు మరియు వైవిధ్యం కాకుండా సంచితాలు సున్న అయిన ఏకైక పంపిణీ.

15.11. మాదిరి పరీక్షా పత్రాలు :

I వ్యాసరూప ప్రశ్నలు :

1) సాధారణ పంపిణీ అనగానేమి ? దారి ప్రాధాన్యతను మరియు అభివృద్ధి క్రమాన్ని వివరించండి ?

2) సాధారణ పంపిణీ అనగానేమి ? సాధారణ పంపిణీ యొక్క వివిధ నిర్వచనాలను వివరించండి ?

II సంక్షిప్త వ్యాసరూప ప్రశ్నలు :

1) సాధారణ పంపిణీ యొక్క ఉపయోగాలను తెలియజేయండి ?

2) సాధారణ పంపిణీ అనగానేమి ? దాని యొక్క గణన పద్ధతులను వివరించండి ?

III సంక్షిప్త ప్రశ్నలు :

1) సాధారణ పంపిణి అప్లికేషన్లు అనగానేమి ?

2) సాధారణ పంపిణి యొక్క లక్షణాలు వివరించండి ?

3) సాధారణ పంపిణి యొక్క ఉపయోగాలు ఏవి ?

4) సాధారణ పంపిణి గణన పద్దతులు ?

15.12. ఆచూకి గ్రంథ్రాలు :

1. లియన్, ఎ. (2014). సాధారణ పంపిణిలు ఎందుకు సాధారణమైనవి ? ది బ్రిటీష్ జర్నల్ ఫర్ ది ఫిలాసఫి ఆఫ్ సైన్స్.

2. ఎడ్వర్డ్ ఎల్. మెల్నిక్ మరియు ఆరోన్ టెనెన్‌బీన్ (1982). "మిస్‌స్పెసిఫికేషన్స్ ఆఫ్ ది నార్మల్ డిస్ట్రిబ్యూషన్; ది అమెరికన్ స్టాటిస్టియన్, వాల్యూమ్ 36, నంబర్ 4, PP. 372-373.

3. టూ కాక్స్, యాజీన్ (1942). "సాధారణ పంపిణి యొక్క లక్షణం". ది ఆనర్స్ ఆఫ్ మాథమెటికల్ స్టాటిస్టిక్స్ 13 (1): PP. 91-93.

4. క్విన్, MP (1993). "సాధారణ పంపిణి యొక్క మూడు లక్షణాలపై "సంభావ్యత మరియు గణిత గణాంకాలు, 14 (2), PP 257-263.

5. హెర్న్‌స్టెయిన్, రిచర్డ్ జె; ముర్రే, ఛార్లెస్ (1994). ది బెల్ రేఖ: ఇంటెలిజెన్స్ అండ్ క్లాస్ స్ట్రక్చర్ ఇన్ అమెరికన్ లైఫ్. ఉచిత ప్రెస్.

6. కర్నీ. CFF (2016). "సాధారణ పంపిణీ నుండి ఖచ్చితంగా నమూనా". గణిత సాఫ్ట్‌వేర్‌పై ACM లావాదేవీలు. 42(1): 3:1, PP. 1-14.

7. మార్సాగ్లియా, జార్జ్ (2004). "సాధారణ పంపిణిని మూల్యాంకనం చేయడం". జర్నల్ ఆఫ్ స్టాటిస్టికల్ సాఫ్ట్‌వేర్. 11(4): 10.18.

205EC21

M.A DEGREE EXAMIANTIONS,

Second Semester

Economics

Paper-V – STATISTICAL METHODS

Time : Three hours Maximum : 70 marks

Answer ALL questions.

All questions carry equal marks.

1. (a) Briefly explain non-random sampling methods.

అయాదృచ్ఛిక ప్రతిరూపగ్రహణ పద్ధతులను క్లుప్తంగా వివరించండి

(b) Explain the merits and demerits of systematic sampling.

క్రమానుగత ప్రతిరూపగ్రహణం యొక్క ఉపయోగాలు మరియు నష్టాలు వివరింపుము.

Or

(c) Define sampling. Explain the advantages of sampling over census.

ప్రతిరూపగ్రహణంను నిర్వహించి, వాని ఉపయోగాలు వివరింపుము.

(d) Explain how to draw samples form population using simple random sampling.

సరళయాదృచ్ఛిక ప్రతిరూపగ్రహణం ద్వారా సమిష్టి నుండి ప్రతిరూపాలను ఎలా గ్రహిస్తారో వివరించండి

2. (a) Explain different types of correlation with an example.

వివిధ రకముల సహసంబంధలను ఉదాహరణలతో వివరింపుము.

(b) Distinguish between correlation and regression.

సహసంబంధం మరియు ప్రతిగమనముల మధ్య బేధాలు వ్రాయండి.

Or

(c) Calculate regression coefficients from the following data:

క్రింది దత్తాంశం నుండి ప్రతిగమన గుణకాలను గణించండి.

X:	2	4	6	8	10	12	14
Y:	4	2	5	10	4	11	12

(d) Explain the components of time series

కాలశ్రేణిలో అంశములను వివరించండి.

3. (a) What is time series? What is need to analyse the time series?

కాలశ్రేణి అంటే ఏమిటి? కాలశ్రేణి విశ్లేషణ వలన ఉపయోగాలు ఏమిటి?

(b) Briefly discuss the methods of measuring trend.

ప్రవృత్తిని కనుగొనే వివిధ పద్ధతులను క్లుప్తంగా చర్చించండి.

Or

(c) If A={1,2,3,4,5}, B = {2,4,6,8,10}, Find A-B, B-A, AUB, A∩B.

A={1,2,3,4,5}, B = {2,4,6,8,10} అయితే A-B, B-A, AUB, A∩Bలను కనుగొన్నండి

(d) A bag contains 5 white and 3 black balls. Two balls are drawn at random one after the other without replacement. Find the probability that both balls are black.

ఒక సంచిలో 5 తెలుపు, 3 నలుపు బంతులున్నవి. యాదృచ్ఛికంగా తెరిగి చేర్చని పద్ధతిలో రెండు బంతులను తీస్తే అవి రెండు నలుపు బంతులు కావటానికి సంభావ్యతను కనుక్కోండి.

4. (a) State and prove Baye's theorem.

బేయిస్ సిద్ధాంతమును తెల్పి, నిరూపించండి.

(b) Define poisson distribution. State its properties.

పాయిజాన్ విభాజనంను నిర్వచించి, వాని ధర్మాలను తెల్పండి.

Or

(c) What is normal probability distribution? Explain the characteristic features of normal distribution.

సామాన్య సంభావ్యత విభాజనం అంటే ఏమిటి? సామాన్య విభాజనం యొక్క లక్షణాలు వివరించండి.

(d) State the properties of Binomial distribution.

ద్విపద విభాజనం యొక్క ధర్మాలు తెల్పండి.

5. (a) Explain the steps involved in testing of hypothesis.

పరికల్పనను పరిక్షించడంలో వివిధ సోపానాలను వివరించండి.

(b) Below are given the gains in weights (lbs) of lions on two diets X and Y

Diet X : 25 32 30 32 24 14 32

Diet Y : 24 34 22 30 42 31 40 30 32 35

Test whether the two diets differ significantly with regard to increase in weight at 5% Level

X మరియు Y రెండు రకముల ఆహారములు సింహములకు ఇవ్వటం వలన వానిలో వచ్చే బరువులు (lbs) సంబంధించిన అంశములు క్రింది ఇవ్వబడినవి. సింహములకు బరువులు పెరుగుదలో రెండు రకముల ఆహారములలో తేడా ఉందో లేదో 5 శాతం సార్థకత వద్ద పరీక్షించండి.

(c) Explain

(i) Null and Alternative hypothesis

(ii) Type – 1 and Type – 2 error.

(i) ప్రాతిపదిక మరియు ప్రత్యామ్నాయ పరికల్పనలు

(ii) టైప్ - 1 మరియు టైప్ - 2 దోషాలను వివరించండి

(d) IQ test on two groups of boys and girls gave the following results.

Girls $\overline{X} = 78$ SD = 10 N=50

Boys $\overline{Y} = 73$ SD=15 N=100

Is there a significant difference in the mean scores of boys and girls.

రెండు సమూహాల మధ్య IQ పరీక్షకు సంబంధించిన ఫలితాలు క్రింది ఇవ్వబడినవి. వాని సగటుల మధ్య భేదం ఉందో లేదో తెల్పండి.

బాలికలు $\overline{X} = 78$ SD = 10 N=50

బాలురు $\overline{Y} = 73$ SD=15 N=100